This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

SBORNÍK
JEDNOTY ČESKÝCH MATHEMATIKŮ
V PRAZE
I.

Eduard Weyr,

PROJEKTIVNÁ GEOMETRIE

ZÁKLADNÝCH ÚTVARŮ PRVNÍHO ŘÁDU.

Math 5158.98.7

SCIENCE CENTER LIBRARY

FROM

Annals of Mathematics

Sborník
Jednoty Českých Mathematiků
v Praze.

Číslo I.

EDUARDA WEYRA

Projektivná geometrie

základných útvarů prvního řádu.

V PRAZE.
Nákladem Jednoty Českých Mathematiků.

Projektivná geometrie

základných útvarů prvního řádu.

Napsal

EDUARD WEYR.

V PRAZE 1898.
Nákladem Jednoty Českých Mathematiků.

Math 5158.98.7

HARVARD COLLEGE LIBRARY
FEB 7 1911
CAMBRIDGE, MASS.

Annals of Mathematics

Knihtiskárna B. Stýbla v Praze.

Předmluva.

Tato kniha podává geometrii projektivných útvarů základných prvního řádu s applikacemi, hlavně na theorii kuželoseček.

Užito v ní methody geometrické i počtářské; na této založena theorie imaginárných elementů, jakož blíže vytčeno v Úvodu.

Na význačnějších místech učiněny odkazy k příslušným pracím původním; hojnějších poukazů literárně-historických nalezne čtenář v *Cremonově* spise „Elementi di Geometria projettiva", jakož i ve *Fiedlerově* spise „Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage". Nástin historie geometrie vůbec, se zvláštním ohledem na rozvoj moderních method v geometrii, podává až do let třicátých *Chaslesův* proslulý „Aperçu historique sur les méthodes et les développements en Géométrie".

Přátele ryze geometrické methody uspokojí stručný spis *Staudtův* „Geometrie der Lage", jakož i krásná kniha téhož názvu od *Reyeho*; mezi základní díla sluší též položiti spis *Steinerův* „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, atd.", Berlin 1832, jakož i *Ponceletův* „Traité des propriétés projectives des figures", Paris 1822, a *Chaslesův* „Traité de Géométrie supérieure", Paris 1852.

Z učebnic jednajících o téže látce, a jichž jest značný počet, budiž zvlášť poukázáno na knihu stručností a přesností vynikající „Einleitung in die projektivische Geometrie der Ebene", již dle výkladů professora *K. Küppera* sepsal Dr. *K. Bobek*, a na obdobný spis od prof. *Rulfa*, dle týchž výkladů sepsaný, jakož i ku knize mého bratra *Emila Weyra* „Grundzüge der projectivischen Geometrie", v níž vytknut zvláštní druh projektivnosti, t. projektivnost cyklická.

Staudt označuje projektivný vztah dvou útvarů zvláštním symbolem, podobajícím se řecké liteře π; užil jsem přímo této litery k označení projektivnosti, k čemuž zde poukázati pokládám za záhodné.

Ku konci si dovoluji vzdáti srdečné díky sl. Jednotě Českých Mathematiků, jež se uvolila v náklad tohoto spisu, jakož i panu stud. tech. *A. Hnídkovi*, jenž pěkně narýsoval obrazce.

Spisovatel.

Úvod.

Stanovíme-li v rovině body pomocí rovnoběžných souřadnic x, y, přísluší každým dvěma reálným jich hodnotám určitý bod a naopak; komplexní hodnoty x, y pokládáme za souřadnice bodu imaginárného, t. j. souhrnu obou komplexních hodnot x, y přiřaďujeme pojem bodu imaginárného, tak sice, že ony dvě hodnoty jsou s tímto bodem aequivalentní.

Dva body, jichž úsečky jsou konjugované komplexní hodnoty, a pořadnice též, slují sobě konjugovanými; reálný bod jest sobě konjugován.

Body, jichž souřadnice hoví lineárné rovnici, jsou na přímce; má-li rovnice koefficienty reálné, lze to o reálných bodech dokázati, má-li koefficienty imaginárné, jest to definice imaginárné přímky, jakož i imaginárných bodů na dané přímce. Každé rovnici lineárné o imaginárných koefficientech lze vyhověti jedinou soustavou reálných hodnot x, y, t. j. na každé imaginárné přímce jest jeden a jen jeden reálný bod, a obdobně vychází, že každým imaginárným bodem prochází jediná reálná přímka.

Dvě přímky, jichž rovnice mají konjugované koefficienty, slují konjugovanými.

Odvození rovnice přímky procházející dvěma body jest jedno, nechť jsou body reálné neb imaginárné, a snadno vychází, že spojnice dvou konjugovaných bodů jest reálná přímka, a obdobně, že průsečník dvou konjugovaných imaginárných přímek jest reálný bod.

Souřadnice přímky č. paprsku plynou z rovnice její stejným způsobem pro reálnou i imaginárnou přímku, jakož i, že imaginárné konjugované přímky mají konjugované souřadnice.

Pojem dělícího poměru, vytknutý pomocí souřadnic bodů neb přímek, platí ihned i pro imaginárné elementy, a tím i věty o neproměnnosti dvojpoměrů promítáním a sečením, o perspektivné poloze projektivných útvarů, a vůbec o projektivnosti.

Rovnici druhého stupně mezi souřadnicemi hoví vždy nekonečně mnoho bodů x, y; v případě, že jsou koefficienty rovnice reálné, může se státi, že rovnici hoví nekonečně mnoho reálných bodů, a body ty naplňují čáru reálnou, jež sluje druhého stupně, jinak zveme souhrn hovících bodů imaginárnou čarou druhého stupně. Obdobně stanoví rovnice druhého stupně mezi souřadnicemi přímkovými reálnou neb imaginárnou čáru druhé třídy.

Průsečíky přímky s čarou druhého stupně, ať reálnou ať imaginárnou, se stanoví stejným způsobem, t. řešením kvadratické rovnice, a jsou tudíž obecně dva. Je-li čára reálná a přímka též, jsou koefficienty kvadratické té rovnice reálné a tudíž kořeny reálné aneb imaginárné konjugované, z čehož jde, že reálná čára druhého stupně protíná reálnou přímku buď ve dvou reálných, případně splývajících, aneb ve dvou imaginárných konjugovaných bodech.

Rovnice tečny, jakožto spojnice dvou nekonečně blízkých bodů čáry, se odvodí jedním rázem jak pro reálnou, tak imaginárnou čáru, jak pro reálný, tak pro imaginárný bod čáry; tečna má ve všech případech jediný společný bod s čarou. Tečny, vedené realným bodem k reálné čáře druhého stupně, jsou buď reálné, po případě splývající, aneb imaginárné konjugované přímky.

Průsečné body dvou reálných čar druhého stupně jsou obecně čtyři; jsou-li imaginárné mezi nimi, vyskytují se vždy podvojně jakožto konjugované imaginárné body, tak že dvě spojnice čtyř průsečíků těch jsou vždy reálné, a obdobné výroky platí o společných tečnách, jelikož tečnové rovnice uvažovaných čar jsou též reálné a druhého stupně, vyjmeme-li čáry degenerované.

V příčině společných bodů dvou algebraických čar platí vůbec zásada algebraicky přímo jasná, že průsečné body dvou čar reálných neb imaginárných jsou konjugovány k průsečným

bodům čar konjugovaných, t. j. čar, jichž rovnice obdržíme, nahradíme-li koefficienty v rovnicích daných čar hodnotami konjugovanými; a táž zásada platí v příčině společných tečen dvou čar. Speciálně jest spojnice dvou bodů přímka konjugovaná se spojnicí jich konjugovaných bodů, a průsečík dvou přímek konjugovaný s průsečíkem konjugovaných přímek.

Jsou-li dané čáry reálné, jsou samy sobě konjugovány, a v tomto speciálném případě vychází, že jich průsečíky imaginárné se vyskytují jen podvojně, totiž vždy dva konjugované, jakož nahoře o čarách druhého stupně již bylo podotknuto; totéž ovšem platí i o společných tečnách realných čar.

Na tomto počtářském podkladu operací s imaginárnými elementy stojí tento spis; podkladem tím jest konstruktivné zužitkování imaginárných elementů odůvodněno a usnadněno, ač ovšem základ ten není ryze geometrickým. Geometrickou theorii imaginárných elementů zbudoval *Staudt* ve svých „Beiträge zur Geometrie der Lage“, a se stanoviska methodičnosti měl jsem se bráti cestou jím naznačenou. Nedostatek mého spisu v příčině methody vyvážen snadností, s jakou začátečník, znalý základův analytické geometrie, se dovede vpraviti do konstruktivného zužitkování imaginárných elementů a útvarů, a jistotou, s níž dovede v tomto směru postupovati.

Kapitola I.

Perspektivný a projektivný vztah základných útvarů prvního řádu.

1. Elementy a základné útvary geometrické.

Bod, paprsek a rovina slují elementy. Základné útvary geometrické jsou jisté souhrny těchto elementů; útvary ty jsou prvního, druhého neb třetího řádu.

Základné útvary prvního řádu jsou přímá řada bodová, svazek paprskový, svazek rovin; útvary druhého řádu jsou soustava rovinná, svazek prostorový; základný útvar třetího řádu jest soustava prostorová. *)

Přímá řada bodová č. stručněji řada bodová jest souhrn všech bodů na dané přímce; jednotlivé body jsou její elementy.

Svazek paprskový č. stručněji svazek jest souhrn všech paprsků procházejících v dané rovině daným bodem, jenž sluje středem neb vrcholem svazku; jednotlivé paprsky jsou jeho elementy.

Svazek rovin jest souhrn všech rovin, vedených danou přímkou, osou svazku; roviny ty jsou jeho elementy.

Rovinná soustava jest souhrn všech elementů v dané rovině, jakož i všech útvarů, jež jimi lze vytvořiti, tedy všech bodů a paprsků, všech řad bodových a svazků paprskových v oné

*) *Staudt*, Geometrie der Lage, art. 26, 28.

rovině, a vůbec všech čar, vytvořených oněmi body nebo paprsky.

Svazek prostorový jest souhrn všech elementů daným bodem — vrcholem neb středem svazku — vedených, jakož i všech útvarů, vytvořených těmito elementy; tedy všech paprsků a rovin, všech svazků paprskových o témž středu, všech svazků rovin, jichž osy středem procházejí, a všech ploch kuželových o zmíněném středu, vytvořených paprsky neb rovinami daného svazku prostorového.

Soustava prostorová konečně jest souhrn všech elementů vůbec, i všech útvarů jimi vytvořených, nechť základných, nechť jiných, tedy čar a ploch.

Každý základný útvar prvního řádu obsahuje nekonečně mnoho elementů, útvar druhého řádu nekonečně mnoho útvarů prvního řádu, konečně útvar třetího řádu nekonečně mnoho útvarů druhého řádu.

Elementy označujeme literami latinskými a malými řeckými, a to body malými latinskými, paprsky velkými latinskými a roviny malými řeckými literami; symbolem $\overline{ab}$ označujeme paprsek vedený body a, b, symbolem (AB) bod společný paprskům A, B, aneb rovinu jimi procházející, symbolem $\overline{\alpha\beta}$ paprsek společný rovinám α, β, symbolem (abc) rovinu vedenou body a, b, c, a pod. Často užito symbolu $\overline{ab}$ též k označení délky omezené body a, b, a symbolu (AB) k označení úhlu, sevřeného paprsky A, B; tato víceznačnost některých symbolů jest však v souvislém textu bezzávadná, zabraňujíc přílišnému počtu různých symbolů.

2. Nekonečně vzdálené elementy; perspektivný názor na prostor.

Spojíme-li všecky body nějaké přímky O s pevným bodem o, mimo ni položeným, obdržíme všecky paprsky svazku o středu o v rovině (oO) položeného, až na paprsek rovnoběžný s přímkou O; chtíce se této výjimky zbaviti, pravíme, že rovnoběžný paprsek prochází nekonečně vzdáleným bodem přímky O. Na každé přímce O si myslíme jeden nekonečně vzdálený bod, poněvadž libovolným bodem o prochází jedna rovnoběžka s přímkou O. Veškeré přímky rovnoběžné s nějakou přímkou O procházejí týmž bodem v nekonečnu, tvoříce elementy svazku prostorového. Za platnosti tohoto názoru lze říci, že se každé dvě přímky v rovině protínají, v konečnu neb v nekonečnu,

a že dvě přímky náležejí jedné rovině tenkrát a jen tenkráte, protínají-li se.

Obdobně pravíme o rovnoběžných rovinách, že se protínají v nekonečnu, ovšem v přímce; na ní se protínají každé dvě rovnoběžné přímky těchto rovin, a jeví se tedy přímka nekonečně vzdálená jakožto geometrické místo všech nekonečně vzdálených bodů těchto rovin a všech rovin s nimi rovnoběžných. V každé rovině si myslíme jednu nekonečně vzdálenou přímku, poněvadž libovolným bodem prochází s rovinou jedna rovnoběžná rovina.

Vytkneme-li všecky nekonečně vzdálené body prostoru, na př. jako nekonečně vzdálené body všech paprsků určitého svazku prostorového, vidíme, že jich geometrické místo má s každou přímkou, v konečnu vedenou, jeden společný bod, a že je každá rovina protíná v přímce. Vzhledem k tomu pokládáme ono geometrické místo za rovinu; naplňují tedy veškeré nekonečně vzdálené body a přímky jednu rovinu: nekonečně vzdálenou rovinu prostoru.

Tímto t. zv. perspektivným názorem na prostor, vytčeným již *Desarguesem*, *) docílena jednotnost ve větách o poloze elementů v prostoru. Výrok na př., že tři roviny mají buď jeden společný bod aneb společnou přímku, platí nyní bez výjimky; má totiž i tenkráte místa, kdy jsou dvě neb všecky tři roviny rovnoběžny, aneb rovnoběžny s přímkou. Obdobně výrok, že třemi body, které nenáležejí přímce, jest stanovena jedna rovina, zahrnuje nyní i případy, kdy jeden neb dva neb i všecky tři body jsou v nekonečnu; skutečně jest stanovena rovina dvěma body a přímkou, s níž má býti rovnoběžna, aneb jedním bodem a dvěma přímkami, s nimiž má býti rovnoběžna, a konečně třemi body v nekonečnu jest stanovena nekonečně vzdálená rovina, to ovšem za supposice, že dané tři body nejsou v přímce, t. j. že nejsou na přímkách rovnoběžných s touže rovinou.

Definice základných útvarů mají platnost i tenkrát, kdy vrcholy svazků, neb řady, neb osy svazků rovin, neb rovinná soustava jsou v nekonečnu. Svazek rovin na př. o nekonečně vzdálené ose se skládá z rovin rovnoběžných; svazek prostorový o nekonečně vzdáleném vrcholu se skládá z rovnoběžných paprsků a ze všech rovin s nimi rovnoběžných a p.

---

*) Oeuvres de Desargues, réunies et analysées par M. Poudra, pag. 104 sqq.

3. Promítání a protínání; průměty a řezy.

Promítati bod z bodu — ze středu promítání — znamená, sestrojiti paprsek, procházející oběma body, a paprsek ten sluje průmětem onoho bodu; obdobně jest průmět paprsku z bodu ona rovina, jež oběma těmito elementy prochází.

Promítati bod z přímky — z osy promítání — znamená, sestrojiti rovinu, oběma procházející; promítati přímku z přímky lze jen tenkráte, když se protínají, a jich společná rovina sluje pak průmětem.

Promítáme-li obrazec složený z bodů a paprsků ze středu promítání o, obdržíme jakožto průmět obrazec složený z paprsků a z rovin, bodem o procházejících, tedy obrazec ve svazku prostorovém. Protnouti obrazec, ve svazku prostorovém obsažený, libovolnou rovinou ϱ, znamená, sestrojiti průsečné body a průsečné přímky elementů, z nichž se obrazec skládá, s rovinou ϱ; tím vzniká v této rovině obrazec, jenž sluje řezem prvního, tento sluje průmětem druhého.

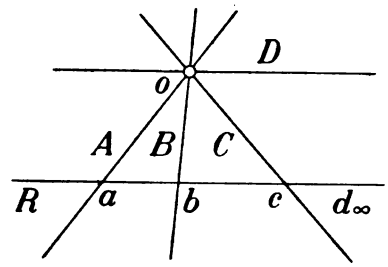
Promítnouti bod z bodu na rovinu ϱ znamená, sestrojiti průsečík promítajícího paprsku s rovinou ϱ, a promítnouti paprsek z bodu na rovinu znamená, sestrojiti paprsek, v němž promítající rovina protíná rovinu ϱ.

Obdobně lze z přímky — osy promítání — promítati body na danou přímku, aneb v dané rovině promítati body z bodu na danou přímku, a p.

4. Perspektivný vztah základných útvarů prvního řádu.

Paprsky, jimiž se veškeré body dané přímky R z libovolného, mimo R položeného bodu o promítají, tvoří svazek paprskový; přiřadíme-li libovolnému bodu řady R onen paprsek, jenž jej promítá, vzniká mezi řadou R a svazkem o vztah perspektivný. *Řada bodová jest perspektivná se svazkem paprskovým, jest-li tento průmětem řady, aneb jinak, jest-li řada řezem svazku.* Oba útvary náležejí ovšem jedné rovině; jich perspektivný vztah jest stanoven, jakmile vytkneme svazek a řadu. V obr. 1. jsou v řadě R vytčeny body a, b, c, d_∞ a ve svazku s ní perspektivném příslušné jim paprsky A, B, C, D; při tom užito symbolu d_∞ k označení nekonečně vzdáleného bodu řady R, jemuž ovšem přísluší paprsek D rovnoběžný s R.

Obr. 1.

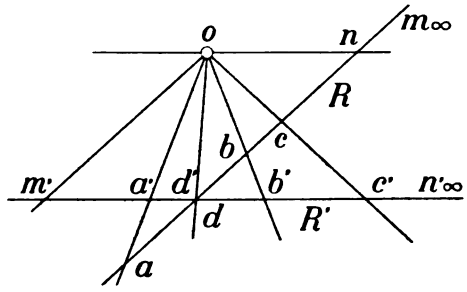


Vztah perspektivný značíme symbolem (π) píšíce $a\ b c d\ \ldots\ (\pi)\ A\ B\ C\ D\ \ldots$ neb stručněji $R\ (\pi)\ o$, a čteme: řada R perspektivná se svazkem o.

Otáčí-li se paprsek svazku jedním rotačním směrem, zaujímaje na př. po sobě polohy $ABCD$. A, *probíhá příslušný bod řadu též jedním směrem* a to spěje z a přes $b, c\ldots$ do nekonečna, a odtud zpět do a. Blíží-li se hyblivý paprsek A pevnému paprsku B, blíží se příslušný bod a pevnému příslušnému bodu b. t. j. *vztah perspektivný jest spojitý.*

Dvě řady bodové $a, b, c, \ldots; a', b', c', \ldots$ *jsou perspektivné, jsou-li řezy téhož svazku paprskového* $A, B, C, \ldots$, *s nímž jsou tedy současně perspektivné* (obr. 2.). Perspektivné řady jsou v rovině, t. v rovině onoho svazku. *Společný bod dvou perspektivných řad přiřaděn sobě*, což stručně vyznačíme $d \equiv d'$.

Obr. 2.



V obrazu vytknuty též body m' a n příslušné nekonečně vzdáleným bodům daných řad.

Vrchol o svazku sluje perspektivným středem řad R a R'; jím tedy procházejí spojnice sdružených bodů.

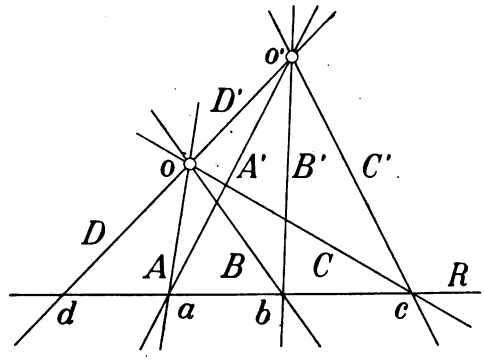
Perspektivný vztah dvou řad R a R' v rovině jest stanoven, jakmile vytknut jich perspektivný střed, aneb dva páry sdružených bodů, na p. a, a'; b, b'. To znamená, že pak lze k libovolnému bodu řady jedné stanoviti příslušný bod řady druhé. Probíhá-li bod první řadu jedním směrem (přes bod v nekonečnu), činí totéž spojitě sdružený bod v druhé řadě.

Dva svazky paprskové jsou perspektivné, jsou-li průměty téže řady aneb řezy téhož svazku rovin. Obé má místa u perspektivných svazků, jichž vrcholy i roviny jsou různé; první má místa, jsou-li perspektivné svazky v jedné rovině a o různých vrcholech, a druhé, jsou-li o témž vrcholu, ale v různých rovinách. — Skutečně, jsou-li ve dvou různých rovinách ϱ a ϱ' dva svazky, jež se jeví býti průměty téže řady R, musí tato řada nutně býti v obou rovinách, a tedy splývati s průsečnou přímkou $\overline{\varrho\varrho'}$

Značíme-li o, o' vrcholy svazků, $a, b, c, \ldots$ body řady $\overline{\varrho\varrho'}$, jsou $\overline{oa}$, $\overline{o'a}$ perspektivně sdružené paprsky svazků, taktéž $\overline{ob}$, $\overline{o'b}$, dále $\overline{oc}$, $\overline{o'c}$, atd. Roviny $(oo\,a)$, $(oo'b)$, $(oo'c)$, .. tvoří svazek rovin na ose $\overline{oo'}$, a oba paprskové svazky jsou řezy jeho s rovinami ϱ resp. ϱ'.

Dva respektivné svazky o, o' v téže rovině jsou průměty řady R v této rovině položené a tedy současně oba perspektivné s touto řadou; *svazky takové mají společný paprsek, a ten jest perspektivně sobě přiřaděn*, jelikož se jím promítá z obou vrcholů o, o' týž bod d řady R (obr. 3.), což vyznačíme $D \equiv D'$.

Obr. 3.



Přímka R obsahující řadu, jejíž průměty jsou perspektivné svazky, *sluje osou perspektivnou obou svazků*. Vztah perspektivný dvou svazků v téže rovině jest vytknut, dána-li jich osa perspektivná, aneb dány-li dva páry sdružených elementů, na př. A, A'; B, B'.

Dva svazky paprskové konečně o témž vrcholu o, ale v různých rovinách ϱ, ϱ' jsou řezy téhož svazku rovin, jehož osa ovšem prochází vrcholem o. Roviny vedené sdruženými paprsky procházejí osou O. Paprsek, oběma svazkům společný, jest přiřaděn sobě, poněvadž se jeví jakožto řez roviny svazku s oběma rovinami ϱ a ϱ'. Vztah takový jest stanoven, vytknuty-li svazky a *osa perspektivná* O, aneb vytknuty-li dva páry sdružených paprsků A, A'; B, B'. Pak totiž roviny (AA'), (BB) se protínají v perspektivné ose O.

Řada bodová jest perspektivná se svazkem rovin, je-li jeho řezem, aneb, což jest totéž, *je-li svazek rovin průmětem řady vzatým z osy svazku.* Ovšem se předpokládá, že řada neprotíná osu svazku rovin. Vztah ten jest stanoven, jakmile jsou útvary vytčeny, t. j. přímka, obsahující řadu a osa svazku rovin.

Svazek paprskový jest perspektivný se svazkem rovin, je-li jeho řezem aneb, což jest totéž, *jest-li svazek rovin průmětem svazku paprskového vzatým z osy.* Osa svazku rovin ovšem prochází vrcholem svazku paprskového, a vztah ten jest opět vytknut, jakmile jsou dány oba útvary.

Dva svazky rovin jsou perspektivné, jsou-li průměty téhož svazku paprskového; vrcholem jeho ovšem procházejí osy obou svazků rovin. Vztah perspektivný dvou svazků rovin, jehož osy se protínají, jest dán, vytknuta li rovina zmíněného svazku paprskového, neb na ní se protínají sdružené elementy svazků rovin; aneb dány-li dva páry α, α'; β, β' sdružených elementů, poněvadž tím zmíněna rovina stanovena, a to, jakožto rovina procházející průsečnicemi $\overline{\alpha\alpha'}$, $\overline{\beta\beta'}$.

Patrně platí o každých dvou perspektivných útvarech základných hořejší výrok:

Probíhá-li element spojitě a stále týmž směrem jeden z obou útvarů, probíhá perspektivně přidružený element druhý útvar též jedním směrem a spojitě.

5. Dělící poměr v řadě; harmonické body.

Jsou-li $a, b, x, \ldots$ libovolné body přímé řady a značí-li symbol (ab) délku měřenou z a do b a vzatou se znamením kladným, shoduje-li se směr z a do b s jedním z obou směrů naší řady, v případě opačném však vzatou se znamením záporným, tu patrně platí

$$(ab) = -(ba) \text{ čili } (ab) + (ba) = o,$$

obecněji

$$(ab) + (bc) + (cd) = (ad),$$

a obdobně pro libovolný počet bodů.

Zvolme v řadě dva *základné body* na př. a, b a naměřme vzdálenosti (ax), (bx) libovolného bodu x řady od těchto bodů; *pak sluje podíl těchto vzdáleností* $(ax) : (bx)$ *dělícím poměrem bodu* x *vzhledem k základným bodům* a, b. Z toho patrno, že každý bod řady má určitý dělící poměr, a sice mají body mezi a a b položené záporné, body mimo délku (ab) ležící kladné dělící poměry. Speciálně má bod rozpolující délku (ab) za dělící poměr hodnotu -1, a bod v nekonečnu poměr $+1$; první výrok jest samozřejmý, a druhý dokážeme, stanovíme-li nejprve dělící poměr ξ bodu x od a a b libovolně vzdáleného, a hledáme-li pak limitu hodnoty ξ pro případ, že se x vzdaluje do nekonečna. Skutečně máme

$$\xi = \frac{(ax)}{(bx)} = \frac{(ab) + (bx)}{(bx)} = \frac{(ab)}{(bx)} + 1,$$

$\lim. \xi = 1$ pro případ $\lim. (bx) = \pm\infty$.

Základný bod a má o za dělící poměr, a bod b hodnotu $\pm\infty$, či lépe řečeno, dělící poměr bodu blížícího se bodu b roste číselně nad každé číslo.

Ku každému dělícímu poměru ξ náleží jeden bod řady. Vedeme-li totiž libovolným bodem x řady libovolnou přímku a protne-li tato dvě rovnoběžky body a, b vedené, v bodech m, n, mají délky $\overline{am}$, $\overline{bn}$ patrně týž poměr jako délky $\overline{ax}$, $\overline{bx}$; volíme-li tedy délky $\overline{am}$, $\overline{bn}$ tak, aby podíl $\overline{am} : \overline{bn}$ byl číselně ξ, protíná spojnice mn řadu v hledaném bodě x, je-li ještě jen o to postaráno, aby při kladném ξ bod x byl mimo délku $\overline{ab}$, při záporném uvnitř, t. j. nanášíme li délky $\overline{am}$, $\overline{bn}$ v témž smyslu, je-li ξ kladné, v opačných smyslech, je-li ξ záporné.

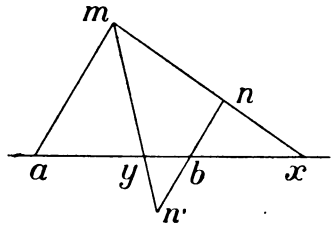
Dva body x, y slují harmonické k bodům a, b, liší-li se jich dělící poměry pouze znamením, jsouce tedy číselně stejné. Z toho jde, že harmonické body x, y oddělují body a, b, č. že jeden jest uvnitř, druhý mimo délku $\overline{ab}$. Dán-li x, lze harmonický bod y snadno sestrojiti; stačí vytknouti dělící poměr bodu x jakožto podíl dvou délek $\overline{am}$, $\overline{bn}$, (obr. 4.), pak délku $\overline{bn'}$ učiniti rovnou $\overline{bn}$ a spojiti body m a n'. Spojnice protíná řadu patrně v harmonickém bodě y.

Jsou-li body x, y harmonické ku a, b, jsou ovšem také body y, x k nim harmonické; ale také a, b, jakož i b, a jsou harmonické k x, y, neboť ze supponované rovnosti

$$\frac{(ax)}{(bx)} = -\frac{(ay)}{(by)},$$

patrně plyne $\frac{(xa)}{(ya)} = -\frac{(xb)}{(yb)}$.

Obr. 4.



Bod půlící délku $\overline{ab}$ a nekonečně vzdálený bod řady jsou k a, b harmonické; dělící jich poměry jsou totiž -1 a 1.

6. Dělící poměr ve svazcích; harmonické paprsky a roviny.

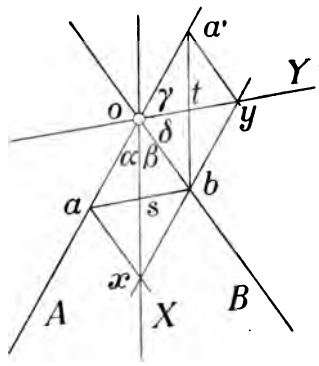
V každém paprsku ve svazku o lze rozeznávati dva polopaprsky, jež odděluje vrchol o. Označme literami A, B dva pevné polopaprsky svazku, a literou X libovolný další polopaprsek jeho. Symbolem (AX) značme úhel sevřený polopaprsky A a X, jejž vytvoříme rotací polopaprsku A kolem vrcholu o do polohy X; při tom počítáme rotační úhly kladně, má-li rotace určitý smysl napřed volený, a záporně, má-li smysl opačný.

Symbol (AX) jest pak ovšem mnohoznačný; je-li totiž α jedním ze zmíněných rotačních úhlů, jsou jimi patrně také úhly $\alpha \pm k \cdot 360^0$, kde k značí libovolné celistvé číslo. Je-li X' druhý polopaprsek s X do jednoho paprsku spadající, značí symbol (AX') patrně úhly $-(180^0 - \alpha) \pm k\ 360^0$, z čehož jde

$$sin\,(AX') = -\,sin\,(AX).$$

Podíl $sin\,(AX) : sin\,(BX)$ nazýváme dělícím poměrem polopaprsku X vzhledem k základným polopaprskům A, B; on jest týž jako dělící poměr $sin\,(AX') : sin\,(BX')$ polopaprsku X', a lze jej tudíž nazývati dělícím poměrem paprsku X. Skutečně jest hodnota obou těch podílů $sin\,\alpha : sin\,\beta$, značí-li β jeden z úhlů (BX). Dělící poměr paprsku X (obr. 5.) lze snadno vyjádřiti jakožto poměr dvou délek; spustíme-li s libovolného bodu paprsku X na základné paprsky kolmice, jest poměr těchto kolmic číselně $sin\,\alpha : sin\,\beta$. Jinak to lze učiniti tím, že zvolíme na X libovolný bod x a doplníme rovnoběžník $oaxb$, jehož dva protější rohy jsou o, x a jehož dvě strany zapadají do A a B; úhlopříčna ox protne úhlopříčnu ab v jejím středu s, tak že trojúhelníky aso a bso mají stejné plochy. Značí-li α, β úhly těchto trojúhelníků při vrcholu o, jsou ony plochy resp. $\frac{1}{2}\,\overline{ao}\,\overline{so}\,sin\,\alpha$ a $\frac{1}{2}\,\overline{bo}\,\overline{so}\,sin\,\beta$, čímž máme rovnost

Obr. 5.



$$\overline{ao}\,sin\,\alpha = \overline{bo}\,sin\,\beta$$

a tedy

$$\frac{sin\,\alpha}{sin\,\beta} = \frac{\overline{bo}}{\overline{ao}}.$$

Volivše na př. rotační směr šípem vyznačený za kladný, máme $sin\,(AX) = sin\,\alpha$, $sin\,(BX) = -\,sin\,\beta$, a tedy dělící poměr paprsku X dán podílem $-\frac{\overline{bo}}{\overline{ao}}$; touž hodnotu by i měl, kdybychom zvolili opačný rotační směr za kladný. Patrně mají všecky paprsky, které zapadají do téhož úhlu mezi polopaprsky A, B jako X, záporné dělící poměry, ostatní paprsky však kladné. Učiníme-li $\overline{ao} = \overline{oa'}$ a doplníme-li rovnoběžník o stranách $\overline{oa'}$, $\overline{ob}$, bude týž s předchozím rovnoběžníkem shodný a jeho úhlo-

příčna oy rovnoběžna s úhlopříčnou $\overline{ab}$. Paprsek Y tak sestrojený má dělící poměr $sin\,(AY) : sin\,(BY)$ rovnající se podílu $sin\,\gamma : sin\,\delta$, t. j. podílu $\frac{\overline{bo}}{\overline{a'o}} = \frac{\overline{bo}}{\overline{ao}}$, jakož z trojúhelníků bto a $a'to$ ihned plyne.

Paprsky X a Y, jichž dělící poměry se různí pouze znamením, slují harmonickými vzhledem k paprskům A, B; volivše jeden z nich, snadno sestrojíme druhý dle obr. 5.

Speciálně jsou paprsky rozpolující úhly paprsků A, B k těmto harmonické, neboť jich dělící poměry jsou patrně $+1$ a -1.

Dán-li dělící poměr paprsku jakožto podíl dvou délek kladně nebo záporně vzatý, jest konstrukce příslušného paprsku dle obr. 5. patrna.

Kdybychom místo A. B zvolili polopaprsky A', B za základné, tu by jedním z úhlů $(A'X)$ byl patrně úhel $180^0 + \alpha$, jehož sinus jest $-sin\,\alpha$, a dělící poměr paprsku X by nyní byl $sin\,\alpha : sin\,\beta$, tedy kladný a různící se jen znamením od dřívějšího poměru.

Volíme-li konečně A', B' za základné polopaprsky, mají všecky paprsky patrně tytéž dělící poměry, jako při základných polopaprscích A. B.

Předchozí úvahu lze ihned převésti do svazku rovin; stačí vésti pomocnou rovinu kolmo k ose svazku a vytknouti průsečné paprsky A, B, X, ... této roviny s elementy α, β, ξ, ... daného svazku rovin. Úhel rovin α, ξ, jejž značíme $(\alpha\xi)$, jest pak úhel paprsků A, X, čímž vše převedeno na svazek paprskový, tak že se dělící poměr $sin\,(\alpha\xi) : sin\,(\beta\xi)$ roviny ξ shoduje s dělícím poměrem paprsku X vzhledem k základným elementům A, B.

7. Stálý podíl dělících poměrů sdružených elementů v útvarech perspektivných.

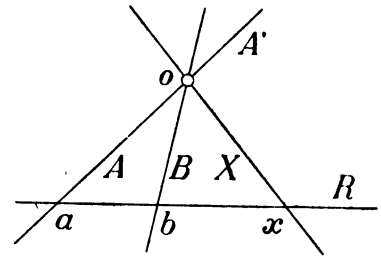
Mějme řadu $a, b, x, \ldots$ perspektivnou se svazkem $A, B, X, \ldots$ Vytkněme si v řadě dva základné elementy, na př. a, b, a ve svazku základné paprsky A, B oněm perspektivně příslušné (obr. 6.). Plochy trojúhelníků axo, bxo se mají k sobě jako základny $\overline{ax}$, $\overline{bx}$, čímž $\overline{ax} : \overline{bx} = \frac{1}{2}\overline{ao}\,\overline{xo}\,sin\,\alpha : \frac{1}{2}\overline{bo}\,\overline{xo}\,sin\,\beta$, značí-li α, β úhly trojúhelníků položené při vrcholu o; máme tedy

$$\frac{\overline{ax}}{\overline{bx}} = \frac{\overline{ao}}{\overline{bo}} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

a tedy také, jelikož dělící poměry bodu x a paprsku X jsou téhož znamení,

$$(ax) = \frac{\overline{ao}}{\overline{bo}} \cdot \frac{\sin(AX)}{\sin(BX)},$$

Obr. 6.



t. j. *dělící poměr bodu x má s dělícím poměrem paprsku X stálý podíl* $\overline{ao} : \overline{bo}$. Stálost tohoto podílu by potrvala i tenkráte, kdybychom za základné polopaprsky volili na př. A'. B; ovšem by pak onen stálý podíl byl opačného znamení.

Dány-li dvě perspektivné řady $a, b, x, \ldots$ (π) $a', b', x', \ldots$, uvažme, že jsou současně perspektivné s týmž svazkem $A, B, X, \ldots$; volíme-li na př. a, b za základné body v řadě první, a pak sdružené a', b' za základné body v druhé, a paprsky A, B za základné v pomocném svazku, bude podíl dělících poměrův elementů x, X stálý, a taktéž poměrův elementů x', X', z čehož soudíme, že i podíl poměrův elementů x a x' jest stálý.

Obdobně se jeví dva perspektivné svazky $A, B, X, \ldots$ (π) $A', B', X', \ldots$ jakožto současně perspektivné s touže pomocnou řadou $a, b, x, \ldots$, z čehož ihned soudíme, že podíl poměrů sdružených elementů X, X' jest stálý, ovšem za supposice, že voleny sdružené elementy A, B a A', B' za základní.

Dán-li svazek rovin $\alpha, \beta, \xi, \ldots$ na ose O perspektivný se svazkem $A, B, X, \ldots$, protněme svazek rovin v novém svazku $A', B', X', \ldots$ rovinou kolmou k ose O; paprsky A, A', jsouce v rovině α, se protínají a jich průsečík a se nalézá v průsečnici rovin obou svazků, a totéž platí o paprscích B, B', a X, X', atd. Jsou tedy svazky $A, B, X, \ldots$ a $A', B', X', \ldots$ perspektivné a tudíž mají poměry paprsků X a X' stálý podíl; avšak poměr paprsku X' jest týž jako poměr roviny ξ, a má tudíž poměr paprsku X s poměrem roviny ξ stálý podíl.

Dán-li svazek rovin $\alpha, \beta, \xi, \ldots$ perspektivný s řadou $a, b, x, \ldots$, stačí vésti řadou libovolnou rovinu, jež nechť protne svazek rovin ve svazku paprskovém $A, B, X, \ldots$ Pak má poměr paprsku X s poměrem roviny ξ jakož i s poměrem bodu x stálý podíl, z čehož soudíme, že je také podíl dělících poměrů elementů ξ a x stálý.

Dány-li konečně dva perspektivné svazky rovin $\alpha, \beta, \xi, \ldots$

(π) $\alpha', \beta', \xi', \ldots$ jsou oba současně perspektivné s týmž svazkem paprsků $A, B, X, \ldots$; má tedy dělící poměr paprsku X jak s dělícím poměrem elementu ξ, tak s poměrem elementu ξ' stálý podíl, z čehož soudíme, že také podíl dělících poměrův elementů ξ a ξ' jest stálý.

Tím dokázána věta:

„Volíme-li ve dvou perspektivných základných útvarech prvního řádu dva páry sdružených elementů za základné, jest podíl z dělících poměrů dvou sdružených elementů stálým.“

8. Dvojpoměr; rovnost dvojpoměrů v útvarech perspektivných.

Dvojpoměrem č. anharmonickou funkcí čtyř elementů a, b, c, d řady bodové nazýváme podíl z dělících poměrů bodů c a d vzatých vzhledem k základným bodům a, b; dvojpoměr ten značíme *) symbolem $(abcd)$, tak že

$$(abcd) = \frac{(ac)}{(bc)} : \frac{(ad)}{(bd)}.$$

Jsou-li body a, b, c, d harmonické, jest jich dvojpoměr patrně — 1; a naopak, z rovnosti

$$\frac{(ac)}{(bc)} : \frac{(ad)}{(bd)} = -1,$$

soudíme. že se dělící poměry bodů c, d liší pouze znamením, a že jsou tedy body a, b, c, d harmonické.

Čtyři body a, b, c, d lze napsati ve dvacetičtyřech pořadech, čímž vznikají 24 dvojpoměry. Z těch jsou vždy čtyři sobě rovny. poněvadž se dvojpoměr nezmění, vyměníme li dva elementy navzájem a zbývající dva také navzájem, t. j. poněvadž platí rovnosti

$$(abcd) = (badc) = (cdab) = (dcba);$$

skutečně, vypíšeme-li na př. třetí, máme hodnotu

$$\frac{(ca)}{(da)} : \frac{(cb)}{(db)} = \frac{(ac)}{(ad)} : \frac{(bc)}{(bd)} = \frac{(ac)}{(bc)} : \frac{(ad)}{(bd)}$$

t. j. hodnotu $(abcd)$.

Dvojpoměry $(abcd)$, $(abdc)$, $(acbd)$, $(acdb)$, $(adbc)$, $(adcb)$ jsou obecně různé mezi sebou, a sice jsou jich hodnoty, označíme-li hodnotu prvního literou h, resp.

$$h, \quad \frac{1}{h}, \quad 1-h, \quad \frac{1}{1-h}, \quad \frac{h-1}{h}, \quad \frac{h}{h-1}.$$

*) *Möbius*, Der barycentrische Calcul, str. 246.

Že $$(abcd) = -\frac{1}{(abdc)}$$

jest přímo patrné, a obdobně jest třetí se čtvrtým, a pátý s šestým reciproký; zbývá ještě odvoditi souvislost třetího a pátého dvojpoměru s prvním. Za tím cílem násobme totožnost

$$(bc) + (ca) + (ab) = 0$$

hodnotou (ad), kterou lze též psáti $(ab) + (bd)$ anebo též $(ac) + (cd)$ čili $-(ca) + (cd)$, a máme totožnost

$$(bc)(ad) + (ca)[(ab) + (bd)] + (ab)[(cd) - (ca)] = 0,$$

t. j. $$(bc)(ad) + (ca)(bd) + (ab)(cd) = 0$$

Eulerem odvozenou,*) již hoví délky omezené čtyřmi body na přímce.

Dělíme-li tuto relaci součinem $(bc)(ad)$, obdržíme

$$1 - \frac{(ac)(bd)}{(bc)(ad)} - \frac{(ab)(cd)}{(cb)(ad)},$$

t. j.

$$(abcd) + (acbd) = 1,$$

a zcela obdobně další rovnici

$$(abdc) + (adbc) = 1.$$

První podává

$$(acbd) = 1 - h,$$

druhá $$(adbc) = 1 - \frac{1}{h} = \frac{h-1}{h},$$

čímž předchozích šest hodnot vyjádřeno hodnotou h.

Záměnou vzájemnou dvou a dvou elementů plynou čtyři dvojpoměry z každého z šesti a s ním rovné, a tím všecky 24 dvojpoměry.

Obdobně zoveme dvojpoměrem čtyř paprsků A, B, C, D téhož svazku podíl z dělících poměrů elementů C, D vzhledem k základným elementům A, B, a značíme symbolem $(ABCD)$; i platí tedy definice

$$(ABCD) = \frac{\sin(AC)}{\sin(BC)} : \frac{\sin(AD)}{\sin(BD)}.$$

Jest patrno, že volba základných polopaprsků na tento dvojpoměr nemá vlivu; změní případně jen dělenec a dělitel své znamení a podíl zůstává týž. Z čtyřiadvaceti dvojpoměrů, jež lze ze čtyř elementů sestaviti, jsou vždy čtyři sobě rovny,

*) Variae demonstrationes geometricae (Novi Commentarii Petropol. t. I, anno 1747 et 1748). Sr. *Chasles*, Aperçu historique sur les méthodes et les développements en Géométrie, p. 305.

a šest různých dvojpoměrů souvisí právě tak, jako v řadě bodové. Obdobná definice platí ovšem také ve svazku rovin.

*Ve dvou perspektivných útvarech prvořadných se rovná dvojpoměr čtyř elementů jednoho útvaru dvojpoměru sdružených elementů druhého útvaru.**) Je-li na př. řada *abcd* . . perspektivná se svazkem $A, B, C, D, \ldots$, tu dle článku předchozího mají podíly

$$\frac{(ac)}{(bc)} : \frac{sin\,(AC)}{sin\,(BC)}, \quad \frac{(ad)}{(bd)} : \frac{sin\,(AD)}{sin\,(BD)}$$

stejnou hodnotu; zaměníme-li v proporci tím získané vnitřní členy, máme proporci

$$\frac{(ac)}{(bc)} : \frac{(ad)}{(bd)} = \frac{sin\,(AC)}{sin\,(BC)} : \frac{sin\,(AD)}{sin\,(BD)}$$

t. j. rovnost $(abcd) = (ABCD)$.

Speciálně vychází, že *čtyřem harmonickým elementům přísluší perspektivně opět elementy harmonické.* Máme-li na př. čtyři harmonické paprsky A, B, C, D, z nichž dva sdružené C, D jsou k sobě kolmy, a protneme-li je přímkou rovnoběžnou s D v bodech a, b, c, d_x, bude bod c harmonický k d_∞ vzhledem k a, b a tedy $(ac) = (cb)$; z toho ale jde, *že paprsky A, B harmonické k dvěma kolmým paprskům C, D s nimi uzavírají stejné úhly.*

9. Řada v nekonečnu, svazek rovnoběžných paprsků neb rovnoběžných rovin.

Při definici dělícího poměru v řadě jsme mlčky předpokládali, že řada není v nekonečnu, jinak by se dělící poměr byl jevil jakožto podíl dvou nekonečně velkých hodnot; a při definici dělícího poměru ve svazku jsme mlčky vyloučili svazek o vrcholu nekonečně vzdáleném, neboť v něm každé dva elementy uzavírají úhel nullový, čímž by se onen poměr jevil ve tvaru podílu dvou nullových hodnot.

Také při definici dvojpoměru jsou tyto speciálné útvary dosud vyloučeny, jelikož tato definice spočívala na předchozí. Tuto mezeru vyplníme následujícím způsobem:

Dvojpoměrem čtyř bodů na přímce nekonečně vzdálené zoveme dvojpoměr čtyř paprsků, jimiž se ony body z libovolného bodu promítají. Volba posledního bodu na dvojpoměr

---

*) Již *Pappus* uvádí v *Collections mathematicae* větu, že dvojpoměr průsečíků čtyř přímek jedním bodem vedených s libovolnou transversalou jest nezávislý na poloze transversaly.

paprsků patrně vlivu nemá a jest tedy definice logicky přípustná; mimo to je patrné, že za této definice i pro řadu v nekonečnu platí základní věta o rovnosti dvojpoměrů v perspektivných útvarech.

Dvojpoměrem čtyř paprsků A, B, C, D svazku o nekonečně vzdáleném vrcholu zoveme dvojpoměr bodů a, b, c, d, v nichž paprsky protíná libovolná přímka. Protne-li jiná přímka ony paprsky v bodech a', b', c', d', jsou již poměry $(ac):(bc)$ a $(a'c'):(b'c')$ stejné, a tedy také dvojpoměry $(abcd)$ a $(a'b'c'd')$, t. j. definovaný dvojpoměr jest na volbě transversaly nezávislý, a tedy definice logicky správná.

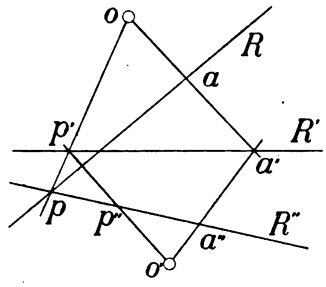
Obdobně definujeme dvojpoměr čtyř rovnoběžných rovin $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ jako dvojpoměr bodů a, b, c, d, v nichž je libovolná přímka protíná.

Snadno lze i zde nahlédnouti, že při těchto definicích potrvá v platnosti již zmíněná základní věta o rovnosti dvojpoměrů v útvarech perspektivných.

10. Projektivnost.

Mějme tři útvary prvořadné, na př. tři řady R, R', R'', a buď první perspektivná s druhou, tato pak perspektivná s třetí. Přísluší-li bodu a první řady perspektivně bod a' v druhé a tomuto perspektivně bod a'' v řadě třetí, lze též mezi první a třetí stanoviti vztah tím, že elementu a přiřadíme element a''. Vztah tento zoveme *projektivným* a značíme $R \pi R''$, jsou-li R a R'' symboly pro první resp. třetí řadu. Že vztah ten obecně není perspektivným, snadno z toho vychází, že společný bod R a R'' není sobě přiřaděn. V obr. 7. jsou o resp. o' perspektivné středy řad R, R' resp. R', R'' a k společnému bodu p první a třetí řady sestrojen příslušný bod p''.

Obr. 7.



Obecně definujeme projektivnost tímto způsobem:

Dána-li řada základných útvarů prvního řádu $U, U_1, U_2, \ldots, U_n$ *a souvi-*

sí-li každý perspektivně s následujícím, pravíme, že první jest projektivný s posledním. *)

Skládá-li se tato řada útvarů jen ze dvou, vidíme, že také perspektivné útvary dlužno pokládati za projektivné. Přestaneme-li na několika po sobě jdoucích útvarech napsané řady, nalézáme, že každé dva z oněch útvarů jsou projektivné.

Jest-li útvar U projektivný s útvarem U_1, a tento s U_2, jest také U projektivný s U_2. Dle supposice dorazíme z útvaru U do U_1 posloupností vztahů perspektivných, a z U_1 do U_2 taktéž takovou posloupností; z čehož patrno, že souhrn těchto perspektivných vztahů vede z U do U_2.

Jsou-li dva útvary projektivné, jest dvojpoměr libovolných čtyř elementů jednoho útvaru týž jako dvojpoměr sdružených elementů druhého. Tato základní věta jest přímo patrna, poněvadž se rovnají dvojpoměry sdružených elementů v útvarech perspektivných. Později (čl. 14.) nalezneme, že má platnost i opačný výrok.

11. Stanovení projektivnosti elementy sdruženými.

Projektivný vztah dvou základných útvarů prvního řádu jest úplně stanoven, přiřadíme-li třem elementům prvního tři elementy druhého útvaru. Především snadno vychází, že takový vztah může býti jen jediný; neboť lze-li na př. dvě řady projektivně tak sestrojiti, aby třem bodům a, b, c řady první příslušely resp. tři body $a' b' c'$ řady druhé, tu libovolnému bodu x přísluší bod x', stanovený rovnicí $(abcx) = (a'b'c'x')$;
z této plyne dělící poměr žádaného bodu x'

$$\frac{(a'x')}{(b'x')} = (abcx) : \frac{(a'c')}{(b'c')},$$

a jím jest bod x' stanoven.

Zbývá ukázati, že žádaný projektivný vztah existuje. Za tím účelem předešleme tyto pomocné věty:

Dvě projektivné řady v téže rovině, jichž společný bod sobě přísluší, jsou perspektivné; dva projektivné svazky v jedné rovině, jichž společný paprsek sobě přísluší, jsou perspektivné; dva projektivné svazky rovin, jichž osy se protínají, a jichž společná rovina sobě přísluší, jsou perspektivné; dva projektivné svazky o témž

*) Zhusta se označuje projektivnost slovem *homografie*, dvojpoměr slovem *anharmonická funkce* čtyř elementů; v. *Chasles*, Traité de Géométrie supérieure, Paris 1852.

vrcholu, ale v různých rovinách, jichž společný paprsek sobě přísluší, jsou perspektivné.

Počněme s dvěma projektivnými řadami R a R', jichž společný bod a sobě přísluší, pročež jej značíme současně a'. Vytknuvše další dva body b, c řady první a projektivně jim příslušné body b', c' řady druhé, veďme přímky $\overline{bb'}$, $\overline{cc'}$ a vytkněme jich průsečík o. Pak jest perspektivný vztah řad R a R, středem o stanovený, patrně totožný s daným vztahem projektivným, neboť on přiřaďuje bodům a, b, c body a', b', c'.

Jde-li o dva projektivné svazky o a o', jichž společný element $A \equiv A'$ si přísluší, vytkněme opět dva páry projektivně sdružených paprsků B, B' a C, C' a dále spojnici O průsečíků (BB'), (CC'). Perspektivný vztah svazků o, o', vytčený osou O, jest totožný s daným projektivným, jelikož elementům A, B, C přiřaďuje elementy A', B', C'.

Jde-li o projektivný vztah dvou svazků rovin, jichž osy O a O' se protínají a jichž společná rovina $\alpha \equiv \alpha'$ sobě přísluší, tu vytkněme další dva páry rovin β, β' a γ, γ' sdružených daným vztahem a veďme průsečnými přímkami $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ rovinu ω. Přiřadíme-li libovolné rovině ξ prvního svazku v druhém rovinu ξ', jenž se s ξ protíná v rovině ω, budou svazky rovin perspektivné; tato perspektivnost, přiřaďujíc elementům α, β, γ resp. elementy α', β', γ', jest s danou projektivností totožna. Jde-li konečně o případ poslední, stačí patrně vésti dvěma sdruženými paprsky rovinu, a dalšími dvěma též; průsečnice těchto rovin jest osou svazku rovin, jehož řezy jsou dané svazky.

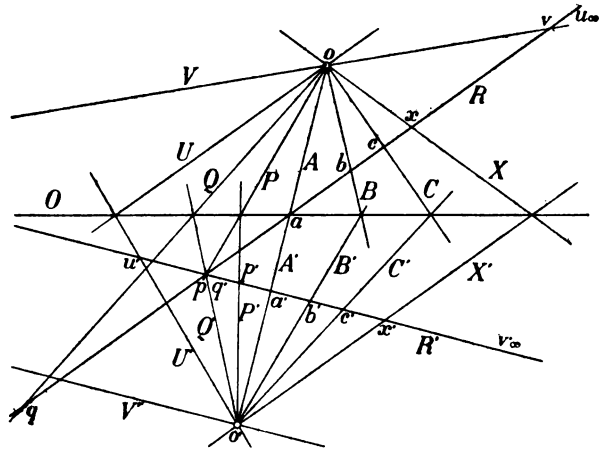
12. Pokračování.

Přikročme nyní k doplnění důkazu věty vyslovené na počátku předešlého článku, t. j. ukažme, *že projektivný vztah, jenž třem elementům jednoho útvaru přiřaďuje libovolné tři elementy druhého, skutečně existuje.*

Buďte a, b, c tři libovolné body řady R a a', b', c' tři libovolné body řady R', a předpokládejme nejprve obě řady v jedné rovině. Lze-li uskutečniti projektivnost, jež by prvním třem bodům přiřaďovala resp. druhé tři, tu dva libovolné pomocné svazky o a o', z nichž každý jest perspektivný s jednou z obou řad, budou dle předchozího článku projektivné. Volíme-li vrcholy o, o' tak, aby dva sdružené paprsky těchto svazků sply-

nuly, na př. paprsky $\overline{oa}$, $\overline{o'a'}$, stanou se svazky, dle věty pomocné právě vyvinuté, perspektivnými. Splynutí paprsků $\overline{oa}$, $\overline{o'a'}$ vymáhá patrně, aby vrcholy o, o' byly na spojnici $\overline{aa'}$.

Obr. 8.



Zvolme tedy (obr. 8.) na spojnici $\overline{aa'}$ dva libovolné body o, o', a promítněme řadu $a, b, c, \ldots$ z bodu o svazkem $A, B, C, \ldots$, řadu $a', b', c', \ldots$ z bodu o' svazkem $A', B', C', \ldots$ Svazky ty sestrojme perspektivně; jich osa perspektivná O jest ovšem spojnicí bodů (BB'), (CC'). Pak jest

$$abc\ldots\ (\pi)\ ABC\ldots,$$
$$ABC\ldots\ (\pi)\ A'B'C'\ldots,$$
$$A'B'C'\ldots\ (\pi)\ a'b'c'\ldots$$

a tedy, dle definice projektivnosti,

$$abc\ldots\ (\pi)\ a'b'c'\ldots,$$

jak bylo učiniti.

Jde-li o konstrukci bodu x' příslušného projektivně libovolnému bodu x řady první, promítněme x z vrcholu o paprskem X a k němu sestrojme perspektivný paprsek X', jenž se s ním na ose O protíná; tento protne řadu R' v bodě x'. Obdobně plyne bod x z bodu x'. Speciálně sestrojen bod u' příslušný nekonečně vzdálenému bodu u_∞ řady první, a bod v příslušný nekonečně vzdálenému bodu v'_∞ řady druhé; dále bod p' příslušný společnému bodu p obou řad, počítán-li do řady první, a bod q příslušný témuž bodu q', počítán-li do řady druhé.

Body u' a v příslušné nekonečně vzdáleným bodům nazveme *body centrálnými projektivných řad.*

Nejsou-li řady R a R' v jedné rovině, stačí jednou z nich, na př. řadou R', vésti libovolnou rovinu ϱ, a řadu R z libovolného bodu, mimo ϱ položeného, promítnouti do řady R'' v rovině ϱ. Sestrojíme-li pak R'' pomocí předchozí konstrukce projektivně s R', budou patrně taky R a R' projektivné.

Jde-li o stanovení projektivnosti, která by třem paprskům A, B, C jednoho svazku přiřaďovala tři paprsky A', B', C' druhého, stačí protnouti první svazek libovolnou přímkou v řadě a, b, c a druhý jinou přímkou v řadě a', b', c', a pak sestrojiti řadu $abc\ldots$ projektivně s řadou $a'b'c'\ldots$ Vztahy

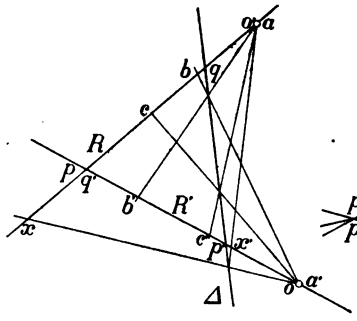
$$ABC\ldots\ (\pi)\ abc\ldots,$$
$$abc\ldots\ \pi\ a'b'c'\ldots,$$
$$a'b'c'\ldots\ (\pi)\ A'B'C'\ldots,$$

stanoví patrně žádaný projektivný vztah mezi oběma svazky. Obdobně lze si počínati při stanovení projektivnosti, jež přiřaďuje třem elementům kteréhokoli útvaru prvního řádu dané tři elementy jiného útvaru prvního řádu. Tím jest věta, vyslovená na počátku předešlého článku, úplně dokázána.

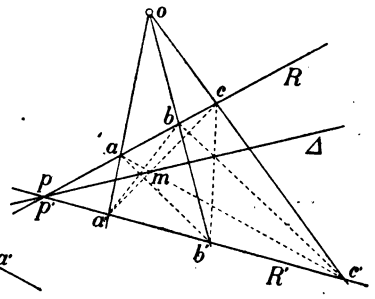
13. Zjednodušení konstrukce projektivných řad.

Předchozí konstrukci projektivných řad lze poněkud tím zjednodušiti, že se vrcholy pomocných svazků položí do dvou sdružených bodů, na př. a, a'; a sice položme o do a' a o' do a (obr. 9.). Svazky $\overline{oa}$, $\overline{ob}$, $\overline{oc}$,.. a $\overline{o'a'}$, $\overline{o'b'}$, $\overline{o'c'}$,.. jsou opět per-

Obr. 9.



Obr. 10.



spektivné, poněvadž se $\overline{oa}$ stotožňuje s $\overline{o'a'}$; perspektivná osa jejich Δ se jeví jakožto spojnice průsečíků $(\overline{ab}\ \overline{a'b})$, $(\overline{ac}\ \overline{a'c})$ a

na ní se ovšem obecně protnou paprsky $\overline{ox}$, $\overline{o'x'}$ čili $\overline{a'x}$, $\overline{ax'}$. *Společnému bodu obou řad přiřaděny ony body, v nichž osa Δ řady protíná.* Počítáme-li společný bod do řady R a zveme pak p, musí se přímky $\overline{op}$, $\overline{o'p'}$ protínati na Δ, pročež p' spadá do bodu, v němž Δ řadu R' protíná; obdobně plyne, že společnému bodu q' přísluší v řadě R bod q na Δ položený.

Kdybychom byli učinili $o \equiv b'$, $o' \equiv b$, byli bychom obdobně nalezli, že průsečíky $(\overline{ba'}\ \overline{b'a})$, $(\overline{bc'}\ \overline{b'c})$, $(\overline{bx'}\ \overline{b'x})$ .. jsou na přímce, a že tato přímka protíná řady v oněch bodech, jež přísluší společnému jich bodu; nesplývají-li body q a p', je tím totožnost této přímky s přímkou Δ dokázána.

Učinivše obecně $o \equiv x'$, $o' \equiv x$, soudíme, že průsečík $(\overline{xy'}\ \overline{x'y})$ jest na přímce Δ, při čemž ovšem q a p' jakožto různé předpokládáme.

Nalezený výsledek však nepozbývá platnosti ani v případě, kdy body q a p' se stotožní, a tedy ovšem splývají s body p a q'. V tomto případě jsou řady R a R' perspektivné (obr. 10.); střed perspektivný nechť jest o. Promítnuvše opět řadu $abcp$ .. z bodu a', a řadu $a'b'c'p'$ .. z bodu a, soudíme, že promítající svazky jsou perspektivné, t. j. že se průsečíky $(\overline{ab'}\ \overline{a'b})$, $(\overline{ac'}\ \overline{a'c})$, $(\overline{ap'}\ \overline{a'p})$, $(\overline{ax'}\ \overline{a'x})$, .. nalézají na přímce, jich ose perspektivné Δ, procházející nyní společným bodem obou řad.

Promítneme-li první řadu z b' a druhou z b, obdržíme opět dva perspektivné svazky, na jichž perspektivné ose se tedy nalézají průsečíky $(\overline{ba'}\ \overline{b'a})$, $(\overline{bc'}\ \overline{b'c})$, $(\overline{bp'}\ \overline{b'p})$, $(\overline{bx'}\ \overline{b'x})$, .. Tato jest s předchozí totožna, poněvadž obě obsahují body $(\overline{ab'}\ \overline{a'b})$ a $(\overline{ap'}\ \overline{a'p})$. A touž perspektivnou osu bychom obdrželi při promítání řad ze dvou libovolných sdružených bodů x a x'; nalézají se tedy i v případě perspektivných řad všecky průsečíky $(\overline{xy'}\ \overline{x'y})$ na pevné přímce, a ta prochází společným bodem obou řad.

Tím dokázáno následující pravidlo čili algorithmus:

Jsou-li $abcxy$ .., $a'b'c'x'y'$ dvě projektivné řady v jedné rovině, tu se nalézají průsečíky $(\overline{ab'}\ \overline{a'b})$, $(\overline{ac'}\ \overline{a'c})$, $(\overline{ax'}\ \overline{a'x})$, $(\overline{bc'}\ \overline{b'c})$, $(\overline{bx'}\ \overline{b'x})$, .., $(\overline{xy'}\ \overline{x'y})$, .. na jedné přímce, která sluje řídící (direkční) osou obou řad; její průsečíky s řadami přísluší projektivně společnému bodu obou řad.

Na základě tohoto algorithmu lze projektivné řady

$$abc\,..\,\pi\ a'b'c'\,..$$

sestrojovati čili doplňovati takto: Sestrojme nejprve jich direkční osu Δ, jež prochází třemi body $(\overline{ab'}\ \overline{a'b})$, $(\overline{ac'}\ \overline{a'c})$, $(\overline{bc'}\ \overline{b'c})$; je-li

pak x libovolně daný bod první řady, plyne přidružený bod x' na př. na základě výroku, že se $\overline{a'x}$ protíná s $\overline{ax'}$ na Δ. Právě odvozený algorithmus řeší úkol:

Nechť se vede přímka spojující daný bod m s nedostupným průsečíkem dvou daných přímek R a R' (obr. 10.). Stačí pokládati bod m za bód direkční osy dvou perspektivných řad na R a R' položených; pak jest direkční osa — procházejíc společným bodem obou řad — žádaná spojnice. Stačí tedy vésti bodem m dvě libovolné přímky a ty pokládati za spojnice $\overline{ac'}$, $\overline{a'c}$; perspektivný střed o řad R a R' jest pak průsečík spojnice $\overline{aa'}$, $\overline{cc'}$, a podává další páry bb',. , a ty pak v bodech $(\overline{ab'}\ \overline{a'b})$,.. další body direkční osy.

Uvážíme-li, že třem libovolným bodům jedné řady lze projektivně přiřaditi tři libovolné body jiné řady, máme tuto větu, kterou již *Pappus* uvádí (Coll. math. VII.): *„Nalézá-li se první, třetí a pátý vrchol šestiúhelníku $ab'cab'c'$ na přímce, a druhý, čtvrtý a šestý též na přímce jiné, tu se protínají protější strany ve třech bodech též na přímce položených.“*

14. Strojení projektivných svazků.

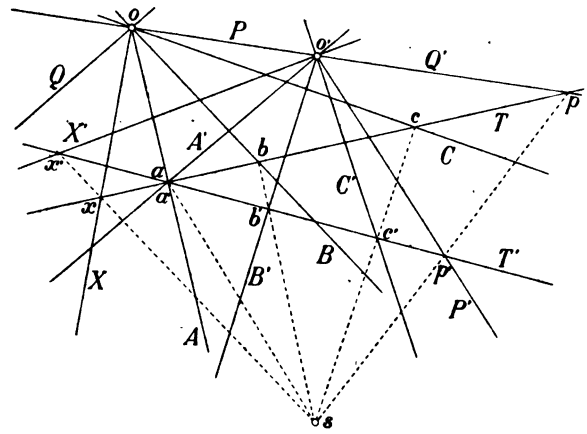
V článku 11. bylo k tomu poukázáno, že lze konstrukci dvou projektivných svazků převésti na konstrukci projektivných řad; jest však žádoucno, abychom též vyvodili přímou konstrukci, obdobnou oné, kterou jsme seznali pro řady.

Budiž tedy dán projektivný vztah dvou svazků v téže rovině o vrcholech o, o' tím, že přiřadíme třem elementům A, B, C prvního tři elementy A', B', C' druhého svazku (obr. 11.). Veďme průsečíkem dvou sdružených paprsků, na př. bodem (AA'), dvě přímky T, T' a protněme přímkou T první svazek v řadě abc.., přímkou T' druhý svazek v řadě $a'b'c'$... Tyto řady jsou projektivné (čl. 10.), a poněvadž jich společný bod $a \equiv a'$ sobě přísluší, jsou v poloze perspektivné, t. j. spojnice $\overline{bb'}$, $\overline{cc'}$,.. sdružených bodů procházejí pevným bodem s. Libovolný paprsek X svazku o protne T v bodě x, jemu perspektivně příslušný bod x' jest na spojnici $\overline{sx}$, a bodem x' prochází sdružený paprsek X'. Speciálně sestrojeny paprsky P' a Q příslušné společnému paprsku P čili Q'.

Opět lze konstrukci zjednodušiti tím, že pomocné řady T a T' položíme do dvou sdružených paprsků, na př. T do A' a T' do A. Spojnice $\overline{b'b}$, $\overline{c'c}$, $\overline{x'x}$,... lze pak psáti symboly

$\overline{(AB')(A'B)}$, $\overline{(AC')(A'C)}$, $\overline{(AX')(A'X)}$, . . ; veškeré tyto přímky procházejí jedním bodem δ, středem perspektivných řad na T a T' vzniknuvších. Sestrojíme-li paprsky P' a Q příslušné společnému paprsku obou svazků, vidíme, že procházejí bodem δ; nejsou-li tedy P' a Q totožny, jest jimi bod δ stanoven, a poloha jeho poznána jako neodvislá od páru AA', do něhož vloženy pomocné řady. Učinivše tedy v tomto případě $T \equiv X'$, $T' \equiv X$, shledáváme, že obecně spojnice $\overline{(XY')(X'Y)}$ též procházejí bodem δ. Bod ten sluje *řídícím* čili *direkčním středem* daných projektivných svazků.

Obr. 11.



Ale i když se paprsky P' a Q sjednotí, tedy ovšem se společným paprskem $P \equiv Q'$, platí hořejší výrok. Svazky jsou v tomto případě perspektivné; v perspektivných řadách, jež stanoví na př. na přímkách $T \equiv A'$, $T' \equiv A$ vyskytující se pár p, p' ukazuje, že střed δ těchto řad jest na spojnici $\overline{pp'}$ obou vrcholů. Volíme-li $T \equiv B'$, $T' \equiv B$, jest opět bod δ perspektivným středem vznikajících řad, jelikož se střed opět nalézá na spojnicích $\overline{pp'}$ a $\overline{(AB')(A'B)}$; a obdobně soudíme při $T \equiv X'$, $T' \equiv X$. Tím dokázán tento algorithmus:

Jsou-li $ABCXY$. . , $A'B'C'X'Y'$ . . dva projektivné svazky v téže rovině, procházejí spojnice $\overline{(AB')(A'B)}$, $\overline{(AC')(A'C)}$, . . $\overline{(XY')(X'Y)}$, . . jedním bodem, řídícím středem svazků; jeho spojnice s vrcholy přísluší projektivně společnému paprsku obou svazků.

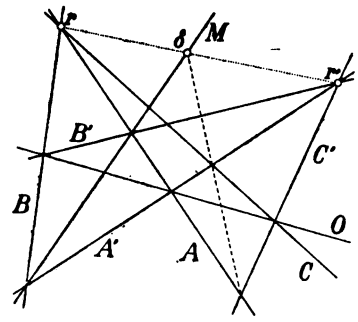
Kterak jej užiti ku konstrukci projektivných svazků, t. j. ku konstrukci jich sdružených paprsků, jest patrné; dán-li

svazek $ABC..\ \pi\ A'B'C'..$, sestrojíme spojnice $\overline{(AB')(A'B)}$, $\overline{(AC')(A'C)}$, jichž průsečík jest direkční střed δ, a spojivše bod $(A'X)$ s δ, máme přímku obsahující bod (AX'). Přímka ta protne A v tomto bodě, a jím prochází hledaný paprsek X'.

Hořejší algorithmus řeší též úkol:

Nechť se stanoví průsečík dané přímky M se spojnicí (nerýsovanou) dvou daných bodů r, r'.

Obr. 12.



Veďme (obr. 12.) bodem r dva libovolné paprsky A, B, a bodem r' paprsky, jež se s nimi na M protínají a sice tak, aby M se jevila býti přímkou $\overline{(AB')(A'B)}$. Učiňme svazek $AB..(\pi)\ A'B'..$, sestrojme jich osu perspektivnou, a další dva sdružené paprsky C, C'. Tak procházejí $\overline{(AB')(A'B)}$, $\overline{(AC')(A'C)}$ bodem δ na $\overline{rr'}$ položeným, t. j. M se protíná s $\overline{(AC')(A'C)}$ v bodě na $\overline{rr'}$ položeném, tedy v hledaném bodě. Jím ovšem prochází také $\overline{(BC')(B'C)}$.

Jde-li o strojení projektivných svazků rovin, stačí je protnouti dvěma přímkami v řadách aneb rovinami ve svazcích, a tyto pak strojiti projektivně.

Jde-li konečně o konstrukci dvou různorodých projektivných útvarů, převede se tato na případy předchozí; má-li se na př. řada $abc..$ sestrojiti projektivně se svazkem $ABC..$, protněme svazek libovolnou přímkou v řadě $a'b'c'..$ a tuto sestrojme projektivně k dané řadě, aneb promítněme danou řadu z libovolného bodu svazkem $A'B'C'...$ a tento sestrojme projektivně k danému svazku.

15. Vztah o stejných dvojpoměrech.

Přísluší-li elementům jednoho základného útvaru prvního řádu elementy druhého takovým zákonem, že dvojpoměr čtyř elementů se vždy rovná dvojpoměru elementů sdružených, jsou útvary projektivné.

Dané útvary buďtež na př. dvě řady bodové, a buďte a, b, c tři elementy řady první, a', b', c' příslušné elementy řady druhé; jsou-li x, x' dva libovolné další sdružené elementy, tu již

z rovnosti dvojpoměrů $(abcx)$, $(a'b'c'x')$ vychází projektivnost obou řad a tedy i rovnost dvojpoměrů sdružených bodů vůbec.

Stačí totiž sestrojiti projektivnost

$$abc\ldots\ \pi\ a'b'c'\ldots;$$

v ní bodu x přísluší bod x' stanovený rovností

$$(abcx) = (a'b'c'x'),$$

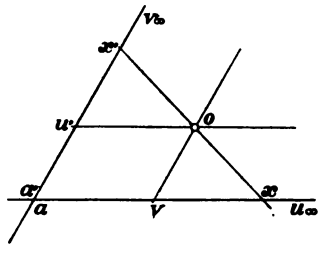
podávající patrně dělící poměr jeho $\frac{(a'x')}{(b'x')}$. Bod ten jest tedy s předchozím bodem x' totožný, a věta tím dokázána.

Z věty této ihned plyne, *že přemístěním útvary projektivné nepřestávají býti projektivnými.*

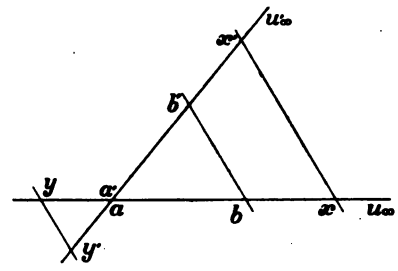
16. Centrálné elementy; podobné a shodné řady, shodné svazky.

Dány-li dvě projektivné řady $abc\ldots\ \pi\ a'b'c'\ldots$, a přísluší-li nekonečně vzdálenému bodu u_∞ řady první bod v konečnu u' řady druhé, tu bod nekonečně vzdálený v'_∞ řady druhé jest různý od u, a tedy bod v různý od u_∞, t. j. v jest též v konečnu. *Body u' a v příslušící bodům nekonečně vzdáleným slují centrálnými body projektivných řad.* O bodech těch platí věta:

Obr. 13.



Obr. 14.



Součin vzdáleností sdružených bodů od bodů centrálných jest stálý, t. j. součin $(vx)(u'x')$ jest stálý. Abychom to ukázali, uveďme řady do polohy perspektivné tím, že sjednotíme dva sdružené body a, a' (obr. 13.); střed perspektivný o jest průsečík spojnic $\overline{uu'}$, $\overline{vv'}$. Z podobných trojúhelníků $u'ox'$, vxo vychází proporce

$$\overline{u'x'} : \overline{u'o} = \overline{vo} : \overline{vx},$$

z níž

$$\overline{u'x'}\ \overline{vx} = \overline{u'o}\ \overline{vo}.$$

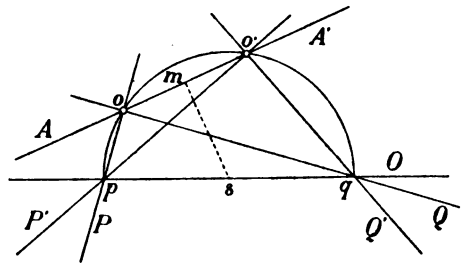
Jest tedy součin $(u'x')(vx)$ číselně stálý, a jelikož patrně ani znamení své nemění, jest věta dokázána.

Zbývá přihlédnouti k případu, kdy nekonečně vzdálenému bodu u_∞ řady první přiřaděn projektivně opět nekonečně vzdálený bod u'_∞ v řadě druhé. *Řady takové slují podobnými, jelikož poměr délek, omezených sdruženými jich body, jest stálý.* Stačí uvésti řady do polohy perspektivné sjednocením dvou sdružených bodů a, a' (obr. 14.); střed perspektivný o jest na spojnicích sdružených bodů $\overline{u_\infty u'_\infty}$, $\overline{bb'}$, .., a tedy v nekonečnu, z čehož patrna rovnoběžnost těchto spojnic a tudíž i rovnost poměrů $(ax) : (a'x') = (ay) : (a'y') = (xy) : (x'y') = \ldots$ Rovnají-li se tyto poměry speciálně ± 1, jsou řady shodné, t. j. délky, omezené sdruženými body, jsou stejné.

Centrálnými elementy dvou projektivných svazků $ABC..\pi$ $A'B'C'..$ zoveme dva k sobě kolmé paprsky $P \perp Q$ svazku prvního a jim příslušné paprsky P, Q' svazku druhého, jsou-li také tyto k sobě kolmé. Obecně se vyskytne v každém ze dvou projektivných svazků jeden pár centrálných paprsků; *je-li jich více, jest jich nekonečně mnoho.*

Abychom to ukázali, uveďme svazky opět do perspektivné polohy sjednocením dvou sdružených elementů A, A' (obr. 15.); jich perspektivná osa budiž O. Vztyčíme-li v bodě m půlícím vzdálenost $\overline{oo}$ obou vrcholů kolmici k této přímce, protne kolmice osu O v jistém bodě s, jejž zvolme za střed kružnice, body o, o' vedené. Kružnice ta nechť protne perspektivnou osu O v bodech p, q; pak procházejí těmito body centrálné paprsky daných svazků. Paprsky P, P' si totiž přísluší, protínajíce se na ose O v bodě p, taktéž paprsky Q, Q' bodem q vedené; a P jest kolmý na Q, jelikož úhel jimi sevřený jest obvodový úhel v kružnici stojící nad průměrem $\overline{pq}$, a z téhož důvodu $P' \perp Q'$. Zároveň jest patrné, že centrálné paprsky při perspektivné poloze svazků vedou nutně k této konstrukci, že tedy obecně v každém z daných projektivných svazků existuje jeden pár centrálných paprsků. Existují-li v každém dva takové páry, tu existují dva středy s, což může jen tehdy nastati, kdy kolmice $\overline{ms}$ splývá s perspektivnou osou O; *pak ale jsou svazky patrně shodné*, a každým dvěma

Obr. 15.



kolmým paprskům jednoho přísluší v druhém opět kolmé paprsky.

Stanovíme-li libovolný paprsek X prvního svazku úhlem (PX), který svírá s centrálným paprskem P, a obdobně projektivně sdružený paprsek X' druhého svazku úhlem $(P'X')$, *jest projektivný vztah počtářsky vytčen tím, že jest podíl* $tg(PX) : tg(P'X')$ *stálý.* Abychom to ukázali, protněme první svazek přímkou kolmou k P v řadě, a druhý svazek jinou přímkou kolmou ku P' v druhé řadě; obě řady budou projektivně podobné a jich body na P resp. P' položené body sdruženými p, p', pročež podíl $(px) : (p'x')$ stálým, jsou-li x, x' body paprskům X, X' příslušné. Avšak délky (px), $(p'x')$ jsou patrně úměrny tangentám úhlů (PX), $(P'X')$, z čehož výrok hořejší patrným.

Kapitola II.

Reciprocita. Úplný čtyrroh a čtyrstran. Perspektivné trojúhelníky a jiné applikace.

17. Reciprocita čili dualnost.

Porovnáme-li konstrukci projektivných řad s konstrukcí projektivných svazků, vyvinutou v první kapitole, shledáme, že jsou si obdobny a sice že vychází jedna z druhé, nahradíme-li navzájem bod a paprsek. Dva obrazce v rovině, souvislé takovým způsobem, slují *reciproké*, *dualné* čili *korrelativné v rovině.* Definice tato není úplná; má zde býti jen poukázáno na dvojitost projektivných obrazců v rovině, jež jsme dosud vytvořili a jež příště ještě vytvoříme. Přesná definice reciprocity a její vlastnosti budou vytčeny v theorii projektivných útvarů druhého a třetího řádu.

Uveďme některé reciproké obrazce *v rovině*, kladouce je vedle sebe.

Dva body stanoví přímku, jich spojnici.

Souhrn bodů na přímce sluje řadou bodovou; body ty jejími elementy.

Dvě přímky stanoví bod, jich průsečík.

Souhrn paprsků bodem vedených sluje svazkem paprskovým; paprsky ty jeho elementy.

Dvě řady jsou perspektivné, procházejí-li spojnice sdružených bodů jedním bodem, jich perspektivným středem.

Je-li $abc\ldots$ řada projektivná s řadou $a'b'c'\ldots$, tu se nalézají body $(\overline{ab'}\ \overline{a'b})$, $(\overline{ac'}\ \overline{a'c})$, .. na jedné přímce.

Souhrn n bodů v rovině nazýváme úplným n-rohem, ony body jeho vrcholy č. rohy a spojnice vrcholů jeho stranami, tak že úplný n-roh má $\frac{1}{2}n\,(n-1)$ stran.*)

Dva svazky jsou perspektivné, nalézají-li se průsečíky sdružených paprsků na jedné přímce, jich ose perspektivné.

Je-li $ABC\ldots$ svazek projektivný se svazkem $A'B'C'\ldots$, tu procházejí přímky $(\overline{AB'})(\overline{A'B})$, $(\overline{AC'})(\overline{A'C})$, .. jedním bodem.

Souhrn n paprsků v rovině nazýváme úplným n-stranem, ony paprsky jeho stranami a průsečíky stran jeho vrcholy nebo rohy, tak že úplný n-stran má $\frac{1}{2}n\,(n-1)$ rohů.

Promítneme-li rovinné obrazce z libovolného bodu o, položeného mimo jich rovinu, promítnou se bod paprskem a paprsek rovinou prostorového svazku o. Řada se promítá svazkem, s ní perspektivným, a svazek se promítá svazkem rovin s ním perspektivným. Tím se rázem veškeré předchozí úvahy a konstrukce přenášejí do svazku prostorového, při čemž reciprokým obrazům rovinným příslušejí obrazce, jež slují *reciprokými ve svazku prostorovém*. Jsou tedy paprsek a rovina reciproké elementy ve svazku prostorovém, dále svazek paprskový se svazkem rovin.

Souhrn n paprsků svazku prostorového nazýváme úplným n-hranem, ony paprsky jeho hranami a roviny dvěma hranami vedené jeho stěnami; počet jich jest $\frac{1}{2}n\,(n-1)$.

Souhrn n rovin svazku prostorového nazýváme úplným n-stěnem, ony roviny jeho stěnami a paprsky průsečné dvou stěn jeho hranami; počet jich jest $\frac{1}{2}n\,(n-1)$.

---

*) Jednoduchým n-rohem neb n-stranem nazýváme soustavu n rohů a n stran v rovině takovou, že každá strana spojuje dva rohy a že každým rohem procházejí dvě strany; jsou-li $\overline{a_1a_2}\ldots\overline{a_n}$ rohy jednoduchého n-rohu čili n stranu a jsou-li $\overline{a_1a_2}$, $\overline{a_1a_n}$, .., $\overline{a_{n-1}a_n}$, $\overline{a_na_1}$ jeho strany, lze jej označiti symbolem $a_1a_2\ldots a_n$. *Úplný n-roh obsahuje* $\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{2}$ *jednoduchých n-rohů* čili *n-stranů*, totiž o týchž rozích jako úplný, a reciprokým způsobem *obsahuje úplný n-stran* $\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{2}$ *jednoduchých n-rohů* čili *n-stranů*, totiž o týchž stranách jako úplný. Na př. úplný čtyrroh *abcd*, má šest stran $\overline{ab}$, $\overline{ac}$, $\overline{ad}$, $\overline{bc}$, $\overline{bd}$, $\overline{cd}$ a obsahuje tři jednoduché čtyrrohy čili čtyrstrany *abcd*, *acdb*, *adbc*. — K úplným n-rohům a n-stranům nejprve poukázal *Carnot* v *Géométrie de position*.

18. Harmonické vlastnosti úplného čtyrrohu a čtyrstranu.

Dvě strany úplného čtyrrohu *abcd* slují protějšími, spojují-li různé vrcholy; šest stran úplného čtyrrohu se seřaďuje do tří párů protějších stran $\overline{ab}$, $\overline{cd}$, dále $\overline{ac}$, $\overline{bd}$, konečně $\overline{ad}$, $\overline{bc}$ (obr. 16.).

Průsečný bod dvou protějších stran sluje diagonalným rohem; diagonalné rohy p, q, r tvoří diagonalný tříroh, a jeho strany slují diagonalnými stranami čtyrrohu.

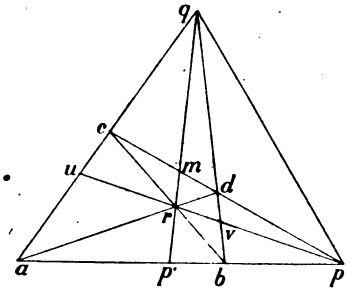
Strany a diagonalné strany úplného čtyrrohu tvoří takovou soustavu devíti přímek, že se na každé z nich vyskytují jen čtyři průsečné body s ostatními osmi přímkami; *a body ty jsou harmonické.*

Dva rohy úplného čtyrstranu $ABCD$ slují protějšími, nalézají-li se na různých stranách; šest rohů úplného čtyrstranu se seřaďuje do tří párů protějších rohů (AB), (CD), dále (AC), (BD), konečně (AD), (BC) (obr. 17.).

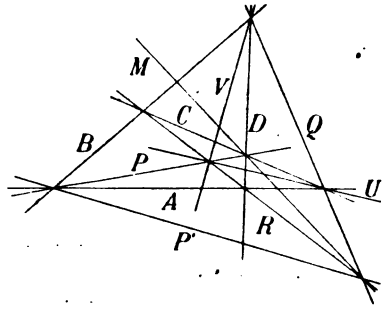
Spojnice dvou protějších rohů sluje diagonalnou stranou; diagonalné strany P, Q, R tvoří diagonalný trojstran, a jeho vrcholy slují diagonalnými rohy čtyrstranu.

Rohy a diagonalné rohy úplného čtyrstranu tvoří takovou soustavu devíti bodů, že každým z nich procházejí jen čtyři spojnice s ostatními osmi body; *a tyto paprsky jsou harmonické.*

Obr. 16.



Obr. 17.



Strana $\overline{ab}$ na př. protíná ostatních osm přímek v bodech a, b, p, p', z nichž dva rohy a, b tvoří jeden pár, a body p, p' druhý pár bodů harmonických.

Bod (AB) na př. spojují s ostatními osmi body paprsky A, B, P, P', z nichž dvě strany A, B tvoří jeden pár, a paprsky P, P' druhý pár paprsků har-

Obdobné čtyři body c, d, p, m na straně $\overline{cd}$ jsou jednak perspektivné s body a, b, p, p' a jinak perspektivné s body b, a, p, p', a sice jsou q resp. r příslušné středy perspektivné; tím máme rovnost dvojpoměrů

$(abpp') = (bapp') = 1 : (abpp')$;

odtud $(abpp')^2 = 1$,

z čehož soudíme, že dvojpoměr $(abpp)$ může míti jen hodnotu $+1$ neb -1. Jeho hodnota však nemůže býti $+1$, neboť by pak body p a p' měly týž dělící poměr vzhledem k bodům a, b, a musí tudíž míti hodnotu -1, t. j. body a, b, p, p' jsou harmonické.

Diagonalnou stranu, na př. $\overline{pr}$, protíná osm zbývajících přímek v bodech u, v, p, r, z nichž poslední dva jsou diagonalnými rohy; body ty jsou harmonické, poněvadž jsou průměty čtyř harmonických bodů a, b, p, p' a to z bodu q.

monických. Obdobné čtyři paprsky C, D, P, M rohem (CD) procházející jsou jednak perspektivné s paprsky A, B, P, P', a jinak perspektivné s paprsky B, A, P, P', a sice jsou Q resp. R příslušné osy perspektivné; tím máme rovnost dvojpoměrů

$(ABPP') = (BAPP') = 1 : (ABPP')$;

odtud $(ABPP')^2 = 1$,

z čehož soudíme, že dvojpoměr $(ABPP')$ může míti jen hodnotu $+1$ neb -1 Jeho hodnota však nemůže býti $+1$, neboť by pak paprsky P a P' měly týž dělící poměr vzhledem k paprskům A, B, a musí tudíž míti hodnotu -1, t. j. paprsky A, B, P, P' jsou harmonické.

Diagonalným rohem, na př. (PR), procházejí čtyry paprsky U, V, P, R spojující jej se zbývajícími osmi body, z nichž poslední dva jsou diagonalnými stranami; paprsky ty jsou harmonické, poněvadž jsou perspektivné k harmonickým paprskům A, B, P, P', protínajíce se s nimi na ose Q.

Pomocí těchto vlastností úplného čtyrrohu a čtyrstranu lze patrně strojiti harmonické body neb paprsky. Jde-li na př. o konstrukci bodu p' harmonického k bodu p vzhledem k bodům a, b (obr. 16.), stačí zvoliti na libovolné přímce, bodem p vedené, dva body c, d jakožto další rohy úplného čtyrrohu $abcd$; jeho diagonalná strana $\overline{qr}$ prochází pak hledaným bodem p'.*)

Reciprokým způsobem sestrojíme (obr. 17.) harmonický paprsek P' ku P vzhledem k A, B, volíme-li dva paprsky C, D

*) Konstrukci tuto podal *De Lahire*, žák Desarguesův, ve svých *Sectiones conicae*, 1685.

nějakým bodem paprsku P libovolně vedené za další dvě strany úplného čtyrstranu $ABCD$; hledaný paprsek P' prochází pak diagonalným rohem (QR) tohoto čtyrstranu.

Harmoničnost bodů *abpp'* aneb bodů *uvpr* v obr. 16, jest patrně aequivalentní harmoničnosti paprsků $q(abpp')$, to jest paprsků $\overline{qa}$, $\overline{qb}$, $\overline{qp}$, $\overline{qp'}$, z nichž první jsou dvě strany a druhé dvě diagonalné strany úplného čtyrrohu *abcd*. Harmonické vlastnosti úplného čtyrrohu lze tedy vyjádřiti následující větou, vedle níž klademe reciprokou větu, vyjadřující harmonické vlastnosti úplného čtyrstranu:

V úplném čtyrrohu jsou každé dvě diagonalné strany harmonické ku stranám, procházejícím jich průsečíkem.

V úplném čtyrstranu jsou každé dva diagonalné rohy harmonické k rohům, položeným na jich spojnici.

Větu po pravé straně uvádí již *Pappus* v *Collectiones Mathem. lib. VII.*

19. Harmonické vlastnosti úplného čtyrhranu a čtyrstěnu.

Tyto by vyšly úvahami ve svazku prostorovém, obdobnými předchozím úvahám, učiněným v rovině o čtyrrohu a čtyrstranu. Lze je ale přímo tím odvoditi, že svazek prostorový protneme rovinou v soustavě rovinné. Řez úplného čtyrhranu jest úplný čtyrroh, a řez úplného čtyrstěnu úplný čtyrstran; harmonické vlastnosti těchto se přenášejí promítáním na ony. Obdobně lze ze všech předchozích obrazců rovinných promítáním z bodu odvoditi příslušné obrazce a konstrukce ve svazku prostorovém, což však zde a po výtce i v následujícím zůstavujeme čtenáři.

20. Perspektivné (homologické) trojúhelníky v rovině.

Procházejí-li tři spojnice sdružených vrcholů dvou trojúhelníků téže roviny jedním bodem, protínají se sdružené jich strany na přímce, a trojúhelníky slují perspektivnými č. homologickými.

Buďte $a_0a_1a_2$ a $b_0b_1b_2$ dva třírohy v téže rovině

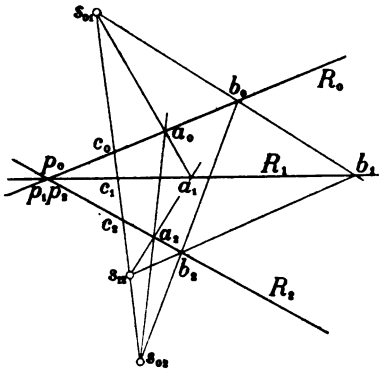
Nalézají-li se tři průsečíky sdružených stran dvou trojúhelníků téže roviny na jedné přímce, procházejí spojnice jich sdružených vrcholů jedním bodem, a trojúhelníky slují perspektivnými čili homologickými.

Buďte $A_0A_1A_2$ a $B_0B_1B_2$ dva trojstrany v téže rovině

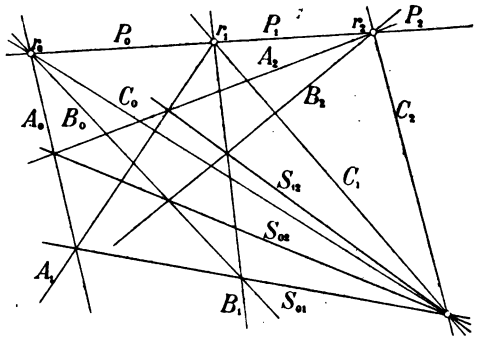
(obr. 18.) a procházejte spojnice $\overline{a_0b_0}$, $\overline{a_1b_1}$, $\overline{a_2b_2}$ jedním bodem p_0. Spojnice ty pokládejme za tři řady bodové R_0, R_1, R_2 a sestrojme $a_0b_0 \ldots (\pi) a_1b_1 \ldots$, dále $a_1b_1 \ldots (\pi) a_2b_2 \ldots$ Pak jest první řada s třetí projektivnou, a poněvadž ve společném jich bodě jsou sjednoceny sdružené body p_0, p_1, p_2, jest s ní perspektivnou.

(obr. 19.), a nalézejtež se průsečíky (A_0B_0), (A_1B_1), (A_2B_2) na jedné přímce P_0. Průsečíky ty pokládejme za vrcholy r_0, r_1, r_2 tří svazků a sestrojme $A_0B_0 \ldots (\pi) A_1B_1 \ldots$, dále $A_1B_1 \ldots (\pi) A_2B_2 \ldots$ Pak jest první svazek s třetím projektivný, a poněvadž ve společném jich paprsku jsou sjednoceny sdružené paprsky P_0, P_1, P_2, jest s ním perspektivný.

Obr. 18.



Obr. 19.



Střed perspektivný s_{01} řad R_0 a R_1 jest průsečík spojnic $\overline{a_0a_1}$, $\overline{b_0b_1}$, střed perspektivný s_{12} řad R_1 a R_2 jest průsečík spojnic $\overline{a_1a_2}$, $\overline{b_1b_2}$, a střed s_{02} řad R_0 a R_2 jest průsečík spojnic $\overline{a_0a_2}$, $\overline{b_0b_2}$.

Spojnice $\overline{s_{01}s_{12}}$ protne řady ve třech sdružených bodech c_0, c_1, c_2, a poněvadž $\overline{c_0c_2}$ prochází středem s_{02}, jsou všecky tři středy perspektivné na jedné přímce.

Osa perspektivná S_{01} svazků r_0 a r_1 jest spojnicí průsečíků (A_0A_1), (B_0B_1), osa perspektivná S_{12} svazků r_1 a r_2 jest spojnicí průsečíků (A_1A_2), (B_1B_2), a osa S_{02} svazků r_0 a r_2 jest spojnicí průsečíků (A_0A_2), (B_0B_2).

Průsečík $(S_{01}S_{12})$ spojen s vrcholy svazků podává tři sdružené paprsky C_0, C_1, C_2, a poněvadž průsečík (C_0C_2) jest na ose S_{02}, procházejí všecky tři osy perspektivné jedním bodem.

Při důkazu tom ovšem mlčky předpokládáme, že spojnice $s_{01}s_{12}$ neprochází společným bodem řad. Prochází-li však tato spojnice bodem p_0, tu stačí uvažovati perspektivnost řady $a_1b_1..$ s řadou $a_2b_2..$, a řady $a_2b_2..$ s řadou $a_0b_0..$; spojnice $s_{12}s_{02}$ jich středů nemůže jíti mimo bod p_0, neboť by pak, dle předchozí úvahy, musila obsahovati bod s_{01}, a tedy by také spojnice $s_{01}s_{12}$ minula bod p_0, proti supposici. Přímky $s_{01}s_{12}$, $s_{12}s_{02}$ procházející bodem p_0, ukazují, že jsou středy s_{01}, s_{12}, s_{02} na jedné přímce, čímž věta úplně dokázána.

Při důkazu tom ovšem mlčky předpokládáme, že průsečík $(S_{01}S_{12})$ se nenalézá na společném paprsku svazků. Nalézá-li se však tento průsečík na paprsku P_0, tu stačí uvažovati perspektivnost svazku $A_1B_1..$ se svazkem $A_2B_2..$, a svazku $A_2B_2..$ se svazkem $A_0B_0..$; průsečík $(S_{12}S_{02})$ jich os nemůže býti mimo paprsek P_0, neboť by pak, dle předchozí úvahy, musil býti na S_{01}, a tedy by také průsečík $(S_{01}S_{12})$ byl mimo P_0, proti supposici. Body $(S_{01}S_{12})$, $(S_{12}S_{02})$, položené na paprsku P, ukazují, že osy S_{01}, S_{12}, S_{02} procházejí jedním bodem, čímž věta úplně dokázána.

Promítneme-li dva perspektivné trojúhelníky v rovině z libovolného bodu, mimo rovinu položeného, obdržíme dva perspektivné trojhrany ve svazku prostorovém, t. j. dva trojhrany, jichž homologické stěny se protínají ve třech paprscích téže roviny, a jichž homologické hrany jsou ve třech rovinách procházejících jedním paprskem. Analogické dvě věty o trojhranech čili trojstěnech téhož svazku prostorového netřeba ani zvláště vyslovovati.

21. Jiné applikace vztahu perspektivného.

Věta, umístěná v předchozím článku po levé straně, odvozena pomocí tří perspektivných řad, jedním bodem vedených. Uvažujme obecněji n řad R_0, R_1, .., R_{n-1} jedním bodem vedených a sestrojme $R_0\,(\pi)\,R_1$, $R_1\,(\pi)\,R_2$, .., $R_{n-2}\,(\pi)\,R_{n-1}$; *pak budou každé dvě z těchto řad projektivné a mimo to v poloze perspektivné*, jelikož společný bod všech řad sobě přísluší každým z daných perspektivných vztahů. Je-li a_0 libovolný bod řady první, a_1, a_2, .., a_{n-1} body postupně příslušné v řadách R_1, R_2, .., R_{n-1}, prochází tedy spojnice $a_\mu a_\nu$ pevným bodem — středem perspektivným $s_{\mu\nu}$ řad R_μ a R_ν. *Body* $a_0\,a_1\,a_2\,..\,a_{n-1}$ *tvoří rohy*

proměnného úplného n-rohu; *rohy ty probíhají pevné přímky* R_0, R_1, .. R_{n-1} *jedním bodem vedené, a zároveň se strany* a_0a_1, a_1a_2, .., $a_{n-2}a_{n-1}$ *otáčejí kolem pevných bodu* s_{01}, s_{12}, .. $s_{n-2,\,n-1}$. *Předchozí úvaha ukazuje, že se pak každá další strana* $a_\mu a_\nu$ *otáčí kolem pevného bodu a že každé tři body* $s_{\mu\nu}$, $s_{\nu\varrho}$, $s_{\varrho\mu}$ *jsou na přímce.* Pomíjejíce reciprokou větu mlčením, přihlédněme speciálně k případu, kdy jde o čtyrroh; máme pak následující větu, vedle níž klademe větu reciprokou, bez dalšího důkazu:

Probíhají-li rohy úplného čtyrrohu $a_0a_1a_2a_3$ čtyři pevné, jedním bodem procházející přímky, a otáčejí-li se tři jeho strany a_0a_1, a_1a_2, a_2a_3 kolem pevných bodů, otáčejí se zbývající tři strany též kolem pevných bodů. Těchto šest pevných bodů se nalézá čtyřikrát po třech na přímce, a tvoří tudíž šest rohů úplného čtyrstranu.

Otáčejí-li se strany úplného čtyrstranu $A_0A_1A_2A_3$ kolem čtyř pevných bodů, položených na jedné přímce, a probíhají-li tři jeho rohy (A_0A_1), (A_1A_2), (A_2A_3) pevné přímky, tu probíhají také zbývající tři rohy pevné přímky. Tyto pevné přímky, jichž jest šest, procházejí čtyřikrát po třech jedním bodem, a tvoří tudíž šest stran úplného čtyrrohu.

Probíhají-li totiž v levé větě strany a_0a_1, a_1a_2, a_2a_3 resp. pevnými body s_{01}, s_{12}, s_{23}, probíhají dle obecné věty taky strany a_0a_2, a_0a_3, a_1a_3 pevnými body s_{02}, s_{03}, s_{13} a jsou body s_{01}, s_{12}, s_{02} na přímce, body s_{01}, s_{13}, s_{03} na přímce, body s_{02}, s_{23}, s_{03} na přímce, konečně body s_{12}, s_{23}, s_{13} na přímce. Tvoří tedy tyto čtyři přímky úplný čtyrstran o rozích s_{01}, s_{02}, s_{03}, s_{12}, s_{13}, s_{23}.

V obecné předchozí větě se vyskytující n-úhelník a_0a_1 .. a_{n-1} jest jedním z jednoduchých n-rohů, obsažených v úplném n-rohu a_0a_1 .. a_{n-1} (viz poznámku v čl. 18.). Lze tedy tuto větu i s větou reciprokou vysloviti též následujícím způsobem:*)

Pohybují-li se rohy proměnného úplného n-rohu na n pevných přímkách, jedním bodem procházejících, a otáčí-li se $n-1$ stran jeho, jež přináleží některému z jednoduchých n-rohů, v něm obsažených, kolem tolikéž pevných bodů, tedy se i ostatní jeho

Otáčejí-li se strany proměnného úplného n-stranu kolem n pevných bodů, položených na jedné přímce, a probíhá-li $n-1$ rohů jeho, náležejících některému z jednoduchých n-stranů, v něm obsažených, tolikéž pevných přímek, tu probíhají také ostatní rohy, počtem

*) *Steiner*, Systematische Entwickelung etc., Werke, I., pag. 294.

strany, počtem $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, pevné přímky, otáčejí kolem pevných bodů, oněmi stanovené. oněmi stanovených.

Věta po pravé straně vyřknutá patrně není ničím jiným, než porismatem, jež *Pappus* v předmluvě k VII. knize svých *Collectiones Mathematicae* vyslovuje, totiž:

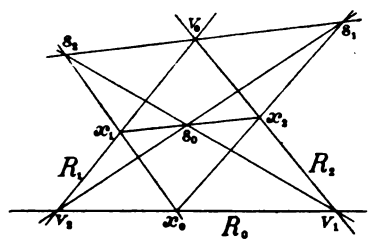
Protíná-li se v rovině $n+1$ libovolných přímek jakkoli, a pokládáme-li body, v nichž n z nich zbývající přímku protíná, za pevné, kdežto se těchto n přímek kolem nich otáčí, a probíhá-li $n-1$ z jich dalších průsečíků pevné přímky řídící, a sice takových $n-1$ bodů, z nichž žádné tři nejsou na třech, žádné čtyři na čtyrech atd. z daných přímek, tu budou i všecky ostatní průsečné body pohyblivých přímek, v počtu triangularném, opisovati přímky, jež jsou dány oněmi řídícími přímkami.

Jakožto další applikaci dokažme větu:

*Jest-li trojúhelníku jiný trojúhelník opsán, tu existuje nekonečně mnoho trojúhelníků současně prvnímu vepsaných a druhému opsaných.**)

Trojúhelníku o vrcholech $v_0v_1v_2$ buď opsán trojúhelník o vrcholech $s_0s_1s_2$, a sice procházej strana $\overline{s_0s_1}$ vrcholem v_2, strana $\overline{s_1s_2}$ vrcholem v_0, a strana $\overline{s_2s_0}$ vrcholem v_1 (obr. 20.). Označme strany $\overline{v_0v_1}$, $\overline{v_1v_2}$, $\overline{v_2v_0}$, pojmuté jakožto řady bodové, literami R_2, R_0, R_1.

Obr. 20.



Sestrojíme-li k řadě R_0 perspektivně řadu R_1 pomocí nějakého perspektivnéko středu s_{01}, a k řadě R_1 řadu R_2 perspektivně pomocí nějakého středu s_{12}, budou řady R_0 a R_2 ovšem souviseti projektivně. Položme si otázku, za jakých okolností také tyto dvě řady souvisí perspektivně, označujíce v tom případě jich perspektivný střed s_{02}. — Řada R_1 se pak promítá z bodu s_{01} do řady R_0 a z bodu s_{12} do řady R_2; perspektivná poloha řad R_0 a R_2 toho vymáhá, aby v jich společném bodě byly dva sdružené body, t. j. dva body, vznikající promítáním téhož bodu řady R_1 z center s_{01}

*) *ibid.* pag. 297.

a s_{12}, a to také stačí. Jinými slovy, *jest tu nutno a stačí, by středy* s_{01}, s_{12} *byly se společným bodem* v_1 *řad* R_0 *a* R_2 *na jedné přímce.* Pak ale obdobně soudíme, že s_{01}, s_{02}, v_0 jsou na jedné přímce, a taktéž body s_{12}, s_{02}, v_2. To ale znamená, že trojúhelník $s_{01}s_{02}s_{12}$ jest trojúhelníkem $v_0v_1v_2$ opsán.

Učiníme-li tedy $R_0\,(\pi)\,R_1$ o středu perspektivném s_2,

$R_1\,(\pi)\,R_2$ „ „ s_0,

bude $R_2\,(\pi)\,R_0$ „ „ s_1.

Volivše na R_0 libovolný bod x_0, sestrojme k němu na R_1 příslušný bod x_1 a tomuto příslušný bod x_2 na R_2; budou pak x_1 a x_2 souviseti třetím vztahem perspektivným, t. j. strany $\overline{x_0x_1}$, $\overline{x_1x_2}$, $\overline{x_2x_0}$ procházejí resp. body s_2, s_0, s_1, a jest tedy trojúhelník $x_0x_1x_2$ trojúhelníku $v_0v_1v_2$ vepsán a trojúhelníku $s_0s_1s_2$ opsán.

Jakožto poslední applikaci vytkněme řešení úkolů:

Dány jsou v rovině tři přímky A, B, C a bod d; bodem d se má vésti přímka T tak, aby její průsečíky a, b, c s danými přímkami a bod d tvořily čtyři harmonické body a, b, c, d.

Řešení Harmonické body a, b, c, d se promítnou z bodu (AB) čtyřmi harmonickými paprsky A, B, C', D, z nichž A, B, D známe; sestrojivše tedy C' harmonicky k D vzhledem k A, B, protne C' přímku C v bodě c, a spojnice $\overline{cd}$ jest žádaná přímka.

Dány jsou v rovině tři body a, b, c a přímka D; na přímce D se má ustanoviti bod d tak, aby jeho spojnice A, B, C s danými body a přímka D tvořily čtyři harmonické paprsky A, B, C, D.

Řešení. Harmonické paprsky A, B, C, D protne přímka $\overline{ab}$ ve čtyřech harmonických bodech a, b, c', d, z nichž a, b, d známe; sestrojivše tedy c' harmonicky k d vzhledem k a, b, jest spojnice bodů c' a c přímkou C, a průsečík (CD) jest žádaný bod.

Kapitola III.

Soumístné útvary projektivné. Samodružné elementy.

22. Soumístné útvary.

Soumístnými nazýváme dva útvary, jsou-li elementy jednoho zároveň elementy druhého; dvě řady na téže přímce jsou soumístné, dva svazky v téže rovině a o společném vrcholu jsou soumístné, dva svazky rovin na jedné ose jsou soumístné.

Při konstrukcích útvarů projektivných, jež byly vyvinuty v předchozí kapitole, jsme mlčky předpokládali, že útvary nejsou soumístné; *strojení soumístných projektivných útvarů lze však rázem převésti na strojení nesoumístných útvarů.* Jsou-li na př. dány dva soumístné projektivné svazky $ABC..\ \pi\ A'B'C'..$, stačí sestrojiti svazek $A''B''C''..$ perspektivně k $A'B'C'..$; bude pak svazek $ABC..\ \pi\ A''B''C''..$, a lze známým způsobem k libovolnému elementu X sestrojiti sdružený X'', jemuž perspektivností přiřaděn element X'. Podobně v soumístných řadách neb svazcích rovin.

V soumístných základných útvarech projektivných se přirozeným způsobem naskytují dvě otázky: předně se tážeme po elementech *samodružných*, a za druhé po elementech *involutorně sdružených.*

Element sluje samodružným, je-li projektivností sobě přiřaděn; dva sdružené elementy si přísluší involutorně, jsou-li sobě projektivností přidruženy, nechť je počítáme do prvního nebo do druhého útvaru.

23. Samodružné elementy.

Vyskytnou-li se ve dvou soumístných projektivných útvarech tři elementy samodružné, jest každý element samodružný; projektivnost jest pak totožností. Máme-li na př. ve dvou soumístných projektivných řadách tři samodružné body $a \equiv a'$, $b \equiv b'$, $c \equiv c'$. a značí-li x, x' dva další sdružené body, plyne z rovnosti

$$(abcx) = (a'b'c'x') = (abcx),$$

že bod x se stotožňuje s x'.

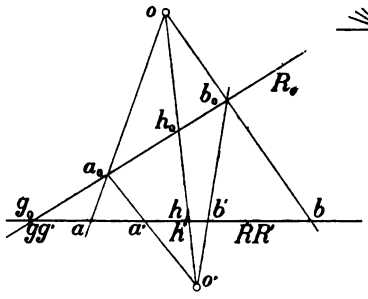
Dva soumístné projektivné útvary, jež nejsou projektivně totožny, mohou tedy míti nanejvýše dva samodružné elementy; a že se tak skutečně státi může, jest zjevné, uvážíme-li, že lze projektivnost o daných dvojných bodech $g \equiv g'$, $h \equiv h'$ tím stanoviti, že bodům g, h, a přiřadíme body g', h', a', volivše a, a' libovolně v dané řadě.

Ve dvou soumístných projektivných útvarech se vyskytují buď dva samodružné elementy, neb jediný (čili dva splývající), aneb žádný realný, nýbrž dva imaginarné samodružné elementy. Jiných případů býti nemůže; že první nastává, jsme právě ukázali, že též druhý a třetí může nastati, ukáže následující a pozdější úvaha.

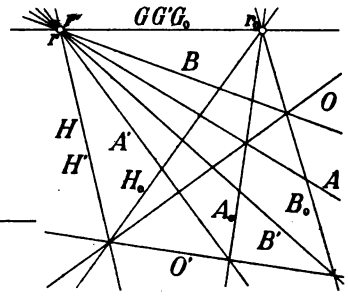
Sestrojme na přímce $R \equiv R'$ dvě projektivné soumístné řady tím, že pomocnou řadu R_0 promítáme ze dvou středů o, o' do $R \equiv R'$ (obr. 21.).

Sestrojme na bodě $r \equiv r'$ dva projektivné svazky tím, že je vytahujeme perspektivně k pomocnému svazku r_0 za pomocí dvou os O, O' (obr. 22.).

Obr. 21.



Obr. 22.



Sdružené body a, a' řad R, R' jsou průměty téhož bodu a_0 řady R_0. Promítáním bodu g_0, společného pomocné řadě a řadám v R, vznikají splývající sdružené body g, g', a taktéž promítáním bodu h_0, na spojnici $\overline{oo'}$ položeného, dva splývající sdružené body h, h'. Soumístné projektivné řady $ab\,..\,\pi\,a'b'\,..$ mají tedy dva samodružné body $g \equiv g'$, $h \equiv h'$.

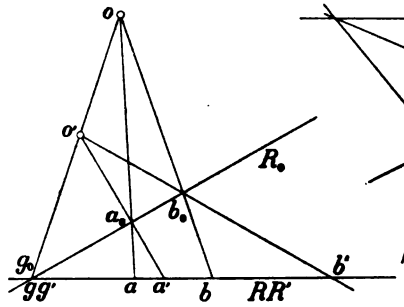
Prochází-li spojnice $\overline{oo'}$ bodem g_0 (obr. 23.), splývá bod h s bodem g, a projektivné řady $ab\,..\,\pi\,a'b'\,..$ mají jediný samodružný bod $g \equiv g'$, aneb jinak řečeno, dva splývající samodružné body $g \equiv g' \equiv h \equiv h'$.

Sdružené paprsky A, A' svazků r, r' se protínají s týmž paprskem A_0 svazku r_0 na osách O, O'. Ze společného paprsku G_0 svazku pomocného a svazků na r vznikají sdružené splývající paprsky G, G', a taktéž přísluší paprsku H_0, průsečíkem (OO') procházejícímu, dva splývající sdružené paprsky H, H'. Soumístné projektivné svazky $AB\,..\,\pi\,A'B'\,..$ mají tedy dva samodružné paprsky $G \equiv G'$, $H \equiv H'$.

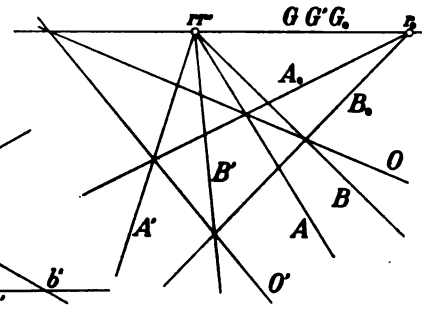
Nalézá-li se průsečík (OO') na paprsku G_0 (obr. 24.), splývá H s G, a projektivné svazky $AB\,..\,\pi\,A'B'\,..$ mají jediný samodružný paprsek $G \equiv G'$, aneb jinak řečeno, dva splývající samodružné paprsky $G \equiv G' \equiv H \equiv H'$.

Abychom konečně vytkli dva soumístné projektivné útvary, jež nemají samodružných elementů (realných), uvažujme svazek paprskový $ABC..$ a otočme jej v jeho rovině kolem vrcholu o libovolný úhel; tím nechť paprsky $A, B, C..$ resp. přijdou do poloh $A', B', C'...$ Svazek $ABC..$ jest shodný se svazkem $A'B'C'..$ a tedy jsou oba svazky i projektivné (čl. 15.); že pak dva sdružené realné paprsky splynouti nemohou, jest patrno, jelikož

Obr. 23.



Obr. 24.



uzavírají vždy úhel, o nějž jsme svazek $ABC..$ byli otočili. — Protneme-li tyto dva svazky transversalou, obdržíme dvě projektivné soumístné řady bez realného samodružného bodu; a sestrojíme-li k nim perspektivně dva svazky rovin na téže ose, procházející ovšem vrcholem, obdržíme dva svazky rovin, soumístné, projektivné a bez samodružných elementů realných.

24. Strojení druhého samodružného elementu.

Znám-li jest jeden samodružný element dvou soumístných projektivných útvarů, lze druhý linearně sestrojiti.

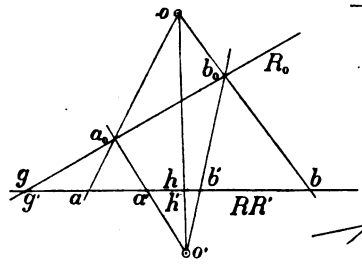
Jsou-li R, R' dvě soumístné řady (obr. 25.), jichž projektivný vztah jest stanoven sdruženými body aa', bb', $g \equiv g'$, veďme samodružným bodem g libovolnou pomocnou řadu R_0, již sestrojíme perspektivně jak k řadě R, tak k řadě R'. Vytkneme totiž na R_0 dva body a_0, b_0, libovolně jakožto příslušné k a, b resp. k a', b' a učiníme

$$ab.. (\pi)\ a_0b_0..,$$
$$a'b'.. (\pi)\ a_0b_0..,$$

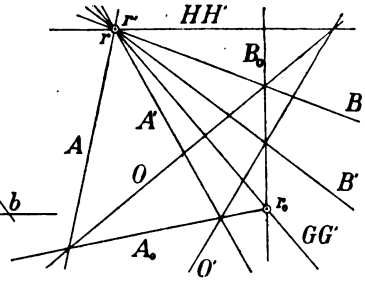
z kterýchž vztahů plyne daný vztah $abg.. \pi\ a'b'g'...$ — Spojnice $\overline{oo'}$ perspektivných středů $o \equiv (\overline{aa_0}\ \overline{bb_0})$, $o' \equiv (\overline{a'a_0}\ \overline{b'b_0})$ protne dané řady R, R' v druhém samodružném bodě $h \equiv h'$ (čl. 23.).

Citovaný článek podává právě tak druhou konstrukci: Bodem g veďme libovolnou přímku a na ní zvolme dva body o, o'; paprsky $\overline{oa}$, $\overline{o'a'}$ se protnětež v a_0, a paprsky $\overline{ob}$, $\overline{o'b'}$ v b_0. Promítáním pomocné řady $a_0b_0\ldots$ z bodů o a o' vznikají patrně dané řady $abg\ldots \pi\ a'b'g'\ldots$, a protne tedy pomocná řada $\overline{a_0b_0}$ dané řady v druhém samodružném bodě $h \equiv h'$. V podstatě ovšem je tato konstrukce totožna s předchozí.

Obr. 25.



Obr. 26.



Jsou-li r, r' dva soumístné projektivné svazky (obr. 26.), jichž vztah jest dán sdruženými paprsky AA', BB', $G \equiv G'$, zvolme na samodružném paprsku G libovolný vrchol r_0 svazku pomocného, jejž sestrojíme perspektivně jak k r, tak k r'. Vytkneme totiž dva libovolné paprsky A_0, B_0 svazku r_0 jakožto příslušné k A, B resp. k A', B' a učiníme

$$AB\ldots (\pi)\ A_0B_0\ldots,$$
$$A'B'\ldots (\pi)\ A_0B_0\ldots,$$

z kterýchžto vztahů plyne daný vztah $ABG\ldots \pi\ A'B'G'\ldots$ Průsečným bodem (OO') os perspektivných $O \equiv \overline{(AA_0)\,(BB_0)}$, $O' \equiv \overline{(A'A_0)\,(B'B_0)}$ prochází druhý samodružný paprsek $H \equiv H'$ svazků r, r' (čl. 23.). Týž článek vede k druhému řešení, které zůstavujeme čtenáři.

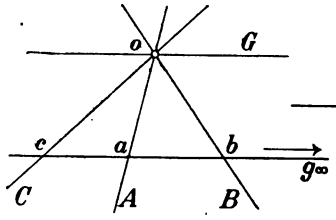
Dán-li konečně projektivný vztah dvou soumístných svazků rovin třemi družinami $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\varrho \equiv \varrho'$, protněme svazky libovolnou přímkou ve dvou soumístných projektivných řadách $abr\ldots \pi\ a'b'r'\ldots$, kdež $r \equiv r'$, a sestrojme druhý samodružný bod $s \equiv s'$ dle methody právě vyvinuté; jím prochází druhá samodružná rovina $\sigma \equiv \sigma$ daných svazků rovin. — Anebo protněme oba svazky rovin libovolnou rovinou ve dvou soumístných projektivných svazcích $ABR\ldots \pi\ A'B'R'\ldots$ a sestrojme jich druhý samodružný paprsek $S \equiv S'$; jím prochází rovina $\sigma \equiv \sigma'$.

25. Strojení samodružných elementů.

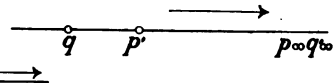
V příčině existence a polohy samodružných elementů dvou soumístných projektivných útvarů můžeme učiniti následující úvahu.

Myslíme-li si ve svazku paprskovém pohyblivý paprsek otáčející se jedním směrem rotačním kolem vrcholu, zaujme týž posloupně polohu všech elementů svazku a vrátí se do první polohy své. Směr rotační lze třemi *po sobě jdoucími* polohami vyznačiti na př. paprsky A, B, C; směr opačný jest vyznačen paprsky C, B, A. Zároveň patrno, že první směr vyznačen též paprsky B, C, A, neb C, A, B, druhý pak paprsky B, A, C neb A, C, B. — Promítneme-li řadu bodovou z libovolného středu svazkem paprskovým, pravíme, že bod probíhá řadu jedním směrem, probíhá-li sdružený paprsek jedním směrem rotačním svazek perspektivný k řadě; z čehož patrno, že tu bod jedním směrem se pohybující (obr. 27.) dospěje do bodů

Obr. 27.



Obr. 28.



a, b.. g_∞ a dále že se s druhé strany vrací z nekonečna týmž směrem přes c do a. Směr, v němž pohyblivý bod řadu probíhá, jest vytčen třemi *po sobě jdoucími* polohami jeho; na př. a, b, c stanoví směr šípem vyznačený, a, c, b směr opačný, a opět s prvním souhlasí směry b, c, a a c, a, b, s druhým směry c, b, a a b, a, c. — Obdobný výrok platí ovšem také o svazku rovin.

Probíhá-li pohyblivý element útvarem základným jedním směrem, probíhá útvarem perspektivným element sdružený patrně též jedním směrem; a totéž platí, vzhledem k definici projektivnosti (čl. 10.), též o dvou útvarech projektivných.

Mějme nyní dva soumístné projektivné útvary, na př. dvě řady abc.. π $a'b'c'$.. Probíhá-li pohyblivý element řadu první na př. ve směru a, b, c, proběhne sdružený element řadu druhou

ve směru a', b', c'; je-li směr tento se směrem prvním totožný, pravíme, že soumístné útvary jsou *souhlasné*, je-li opačný, *nesouhlasné*; kdybychom byli v první řadě zvolili směr a, c, b, byl by v druhé směr a', c', b' opět s oním souhlasil resp. nesouhlasil, tak že definice jest přípustna.

Ve dvou soumístných projektivných útvarech nesouhlasných se vyskytnou vždy dva realné samodružné elementy; v útvarech souhlasných se mohou vyskytnouti dva různé neb dva splývající, aneb se nevyskytnou žádné realné samodružné elementy.

Stačí patrně, dokážeme-li větu o dvou řadách; neboť dva soumístné projektivné svazky neb svazky rovin protíná libovolná přímka ve dvou soumístných řadách.

26. Útvary nesouhlasné.

Mějme tedy dvě soumístné řady $abc\ldots\ \pi\ a'b'c'\ldots$ a předpokládejme nejprve, že nejsou podobny, že tedy bodu v nekonečnu p_∞ řady první přísluší bod v konečnu (centrálný) p' v řadě druhé, a tedy i bodu q'_∞ řady druhé bod v konečnu (centrálný) q v řadě první (obr. 28.). Vytkněme si v řadách určitý z obou směrů jakožto směr první, na př. šípem vyznačený, a opačný jako druhý. Proběhne-li bod řadu první směrem prvním, proběhne v případě *nesouhlasných útvarů* bod sdružený řadu druhou směrem druhým, z čehož patrno, že bod řady první spějící od q do p_∞ směrem prvním se setká s bodem sdruženým spějícím od q'_∞ do p' směrem opačným, a to kdesi mimo délku $\overline{qp'}$. Pokračuje-li bod řady první stejným směrem (t. j. prvním) z p_∞ do q, pokračuje sdružený bod směrem druhým z polohy p' do q'_∞, z čehož opět patrno, že se dva sdružené body setkají a to zase mimo délku $\overline{qp'}$. Mají tedy dvě nesouhlasné řady dva samodružné elementy, položené mimo délku, omezenou body centrálnými. Tyto samodružné body $x \equiv x'$ jsou tím charakterisovány, že součin $(qx)(p'x')$ musí míti stálou hodnotu, v čl. 16. vytčenou, čímž získána *první konstrukce samodružných bodů dvou nesouhlasných projektivných řad* $abc\ldots\ \pi\ a'b'c'\ldots$ Stačí sestrojiti jich centrálné body q, p' a pak nalézti v řadě bod x, hovící rovnici

$$(qx)(p'x) = (qa)(p'a'),$$

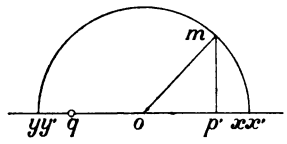
což lze takto provésti (obr. 29.). Jelikož směr qap_∞ dle supposice jest opačný k směru $q'_\infty a'p'$, jsou délky (qa), $(p'a')$ téhož směru a jich součin tedy kladný, čímž možno jej označiti

jakožto čtverec λ^2 délky λ; délku λ sestrojíme jakožto střední geometrickou úměru mezi (qa) a $(p'a')$. Na kolmici, vztyčenou v bodě p' na dané řady, nanesme délku $\overline{p'm} = \lambda$ a učiňme $\overline{om} = \overline{ox} = \overline{oy}$, značíce o střed délky qp'; body x a y jsou pak samodružné body. Skutečně platí

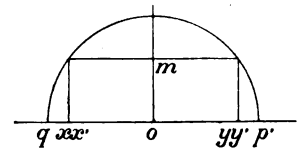
$$\lambda^2 = \overline{p'm}^2 = \overline{om}^2 - \overline{op'}^2 = (\overline{om} + \overline{op'})(\overline{om} - \overline{op'}) = \overline{qx} \cdot \overline{p'x},$$

a ovšem také $\lambda^2 = \overline{qy}\ \overline{p'y}$.

Obr. 29.



Obr. 30.



Mějme po druhé dvě *podobné* soumístné řady *nesouhlasné*; pak v nekonečně vzdáleném bodu obou řad splývají dva sdružené body p_∞, p'_∞. Jsou-li a, a' další dva sdružené body, jakož i b, b', bude směr a, b, p_∞ opačný ku směru a', b', p'_∞; proběhne-li tedy bod řadu první, vycházeje z p_∞, jedním směrem, proběhne sdružený řadu druhou, vycházeje též z nekonečna, směrem opačným, z čehož patrno, že se sdružené body v konečnu jednou stotožní. Mají tedy i podobné soumístné řady nesouhlasné dva body samodružné, z nichž jeden jest ovšem v nekonečnu. Znajíce jeden samodružný bod $p_\infty \equiv p'_\infty$ soumístných řad $abp_\infty \ldots \pi\ a'b'p'_\infty \ldots$, sestrojíme druhý dle čl. 24. Tím zároveň řešena úloha:

„Na přímce jsou dány čtyři body a, b, a', b' v konečnu položené; má se stanoviti bod x, jenž má vzhledem k a, b týž dělící poměr jako vzhledem k a', b'.“

Jest patrno, že hledaný bod x jest samodružným bodem podobných řad $abp_\infty \ldots \pi\ a'b'p'_\infty$, a že jej dle čl. 24. nalezneme, nechť jsou řady souhlasné neb nesouhlasné; v případě prvním se může (l. c.) přihoditi, že oba samodružné body splývají v nekonečnu.

27. Útvary souhlasné.

Mějme dvě soumístné projektivné řady souhlasné $abc \ldots \pi\ a'b'c' \ldots$ a předpokládejme nejprve, že nejsou podobné, t. j. že bodům nekonečně vzdáleným p_∞, q'_∞ přísluší body v konečnu

(centrálné) p', q (obr. 30.). Spěje-li bod první řady z q do p_∞ směrem šípem vyznačeným, spěje sdružený bod týmž směrem z q'_∞ do p', a *mohou se sdružené body patrně jen mezi q a p' setkati*; spěje-li bod první řady týmž stále směrem z p_∞ do q, spěje týmž směrem bod sdružený z p' do q'_∞, a *při tomto pohybu se sdružené body setkati nemohou.* Přihlédneme-li k dvěma sdruženým polohám u, u' při tomto druhém pohybu, vysvítá ihned, že (qu) a $(p'u')$ jsou různých znamení, že tedy stálý součin $(qa)(p'a') = (qb)(p'b') = \ldots$ jest hodnotou zápornou $-\lambda^2$. Délka λ se opět jeví býti střední měřickou úměrou mezi $\overline{qa}$ a $\overline{p'a'}$. Lze-li mezi q a p' stanoviti bod $x \equiv x'$ takový, že

$$(qx)(p'x') = -\lambda^2,$$

t. j. že λ jest střední geometrickou úměrou mezi $\overline{qx}$ a $\overline{p'x}$, bude x bodem samodružným. V té příčině nutno rozeznávati tři případy.

A) Je-li $\lambda < \frac{\overline{qp'}}{2}$, sestrojme (obr. 30.) nad průměrem $\overline{qp'}$ kružnici a na průměr její kolmý k řadám nanesme $\overline{om} = \lambda$; bodem m veďme s řadou rovnoběžku a promítněme její průsečíky s kružnicí kolmo na řadu do bodu x a y. Pak patrně

$$\overline{qx} \cdot \overline{p'x} = \lambda^2, \quad \overline{qy} \cdot \overline{p'y} = \lambda^2,$$

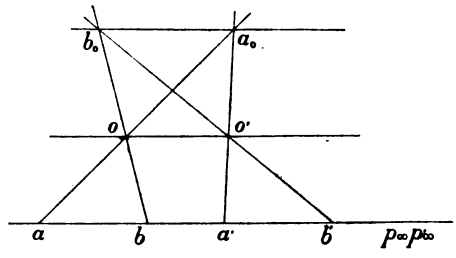
a tedy jsou $x \equiv x'$, $y \equiv y'$ samodružné body projektivných řad.

B) Je-li $\lambda = \frac{\overline{qp'}}{2}$, podává předchozí konstrukce dva splývající samodružné body, a sice spadají do bodu o, který rozpoluje vzdálenost bodů centrálných q a p'.

C) Je-li $\lambda > \frac{\overline{qp'}}{2}$, pak pro každý bod x mezi q a p' položený patrně součin $\overline{qx} \cdot \overline{p'x}$ jest menší než λ^2, a tedy neexistuje žádných realných samodružných bodů.

Mějme za druhé dvě soumístné podobné řady souhlasné $abp_\infty \ldots \pi\, a'b'p'_\infty \ldots$ Nekonečně vzdálený bod jest jedním bodem samodružným a druhý plyne konstrukcí v čl. 24. uvedenou; mají tedy řady takové dva samodružné body, z nichž jeden jest v neko-

Obr. 31.



nečnu, s nímž případně i druhý může splynouti. Je-li totiž $(ab) = (a'b')$, tu (obr. 31.) volivše dle druhého řešení citovaného článku na přímce bodem p_∞ vedené dva pomocné vrcholy o, o', snadno nahlédneme, že pomocná řada $a_0 b_0$ jest rovnoběžna s danými řadami, a že tedy i druhý samodružný bod splývá s bodem v nekonečnu. *Mají tedy shodné souhlasné řady, v téže přímce položené, dva splývající samodružné body v nekonečnu.* A jen takové řady mají splývající samodružné body v nekonečnu, jakož z jich konstrukce dle čl. 23. ihned vychází.

28. Počtářské stanovení projektivnosti řad bodových.

Dány-li dvě řady R, R', a zvolíme-li v každé libovolně pevný bod o resp. o', můžeme libovolný bod x řady první úplně stanoviti vzdáleností (ox), a libovolný bod řady druhé vzdáleností $(o'x')$, volivše ovšem v každé řadě napřed směr kladných délek. Libovolná relace mezi těmito vzdálenostmi stanoví vztah mezi oběma řadami, t. j. přiřaďuje bodům jedné body druhé.

Projektivný vztah dvou řad jest stanoven relací tvaru

$$a\,(ox)\,(o'x') + b\,(ox) + c\,(o'x') + d = o,$$

a každá relace tohoto tvaru stanoví vztah projektivný, nemizí-li $ad - bc$.

Položme za příčinou stručnosti $(ox) = \xi$, $(o'x') = \xi'$, a dokažme nejprve druhou část věty, t. j. dokažme, že relace

$$(1) \qquad a\xi\xi' + b\xi + c\xi' + d = o,$$

v níž a, b, c, d značí čtyři stálé hodnoty, při $ad - bc \gtrless o$ stanoví projektivný vztah

Supposice $ad - bc \gtrless o$ jest nutná a stačí, aby napsaná relace souhrnu všech hodnot ξ přiřaďovala souhrn všech hodnot ξ', tak sice, aby proměnným ξ příslušely též proměnné hodnoty ξ'. Tomu by bylo jinak, kdyby bylo lze při libovolném ξ vyhověti relaci určitým ξ', t. j. kdyby

$$(a\xi' + b)\xi + c\xi' + d = o$$

při určitém ξ' a libovolném ξ; to nastane při současné platnosti rovnic

$$a\xi' + b = o, \quad c\xi' + d = o,$$

jimž lze vyhověti při $ad - bc = o$. Supponujeme-li tedy $ad - bc \gtrless o$, vyloučíme tento případ, a relace (1) pak přiřaďuje proměnným hodnotám ξ též proměnné hodnoty ξ'.

Označme x, y, z, t čtyři libovolné body řady R, a x', y', z', t'

relací (1) jim přiřaděné body řady R'. Projektivnost řad bude dokázána, dokážeme-li, že platí rovnost dvojpoměrů (čl. 15.)

$$(xyzt) = (x'y'z't').$$

Učinivše $\eta = (oy)$, $\zeta = (oz)$, $\tau = (ot)$, $\eta' = (o'y')$, $\zeta' = (o'z')$, $\tau' = (o't')$, jsou η, η', pak ζ, ζ' a konečně τ, τ' ovšem vázány relací (1). Máme tedy

$$\xi' = -\frac{b\xi + d}{a\xi + c}, \quad \eta' = -\frac{b\eta + d}{a\eta + c}, \text{ atd.,}$$

a tedy

$$(x'z') = (x'o') + (o'z') = -\xi' + \zeta' = \frac{b\xi + d}{a\xi + c} - \frac{b\zeta + d}{a\zeta + c} = \frac{(ad - bc)(\zeta - \xi)}{(a\xi + c)(a\zeta + c)}.$$

Obdobně $$(y'z') = \frac{(ad - bc)(\zeta - \eta)}{(a\eta + c)(a\zeta + c)},$$

z čehož dělící poměr v řadě druhé vyjádřen

$$\frac{(x'z')}{(y'z')} = \frac{a\eta + c}{a\xi + c} \cdot \frac{\zeta - \xi}{\zeta - \eta}.$$

Obdobně, klademe-li t, t' na místo z, z':

$$\frac{(x't')}{(y't')} = \frac{a\eta + c}{a\xi + c} \cdot \frac{\tau - \xi}{\tau - \eta},$$

a dělením obou těchto rovnic nalezen dvojpoměr

$$\frac{(x'z')}{(y'z')} : \frac{(x't')}{(y't')} = \frac{\zeta - \xi}{\zeta - \eta} : \frac{\tau - \xi}{\tau - \eta}.$$

Avšak na pravé straně stojí dvojpoměr $(xyzt)$, jelikož

$$\zeta - \xi = (oz) - (ox) = (xo) + (oz) = (xz),$$
$$\zeta - \eta = (yz), \quad \tau - \xi = (xt), \quad \tau - \eta = (yt),$$

tak že poslední rovnici lze psáti

$$(x'y'z't') = (xyzt),$$

jak bylo dokázati.

První část věty, že totiž každý projektivný vztah jest stanoven relací tvaru (1), plyne pro projektivné řady nepodobné ihned z věty odvozené o bodech centrálných q, p' (čl. 16.); součin $(qx)(p'x')$ dle té věty jest stálý. Označivše h tuto stálou hodnotu, máme $(qx)(p'x') = h$,

aneb, zavedeme-li délky z libovolných počátků o, o' měřené,

$$[(qo) + (ox)][(p'o') + (o'x')] = h,$$

t. j. učinivše $(qo) = m$, $(p'o') = m'$,

$$(m + \xi)(m' + \xi') = h,$$

což jest skutečně relace tvaru (1). — Jsou-li řady podobny a značí-li g, g' dva sdružené jich body, máme (čl. 16.)

$$\frac{(g'x')}{(gx)} = h,$$

kde h značí stálou, čili

$$\frac{(g'o')+(o'x')}{(go)+(ox)}=h, \text{ t. j. } \frac{m'+\xi'}{m+\xi}=h,$$

což jest opět relace tvaru (1). Tím ale jest věta, na počátku článku vyslovená, úplně dokázána.

Relace (1) *stanoví při* $ad-bc\gtrless o$ *i tenkráte projektivný vztah, mají-li* ξ, ξ' *význam dělících poměrů sdružených bodů, vzatých vzhledem k libovolným bodům základným.*

Abychom to dokázali, označme h, k dva libovolné body (základné) v řadě R, h', k' dva libovolné body řady R' a položme

$$\xi=\frac{(hx)}{(kx)}, \quad \xi'=\frac{(h'x')}{(k'x')}.$$

Vyjadřme především dělící poměr ξ pomocí úseku (ox), a dělící poměr ξ' pomocí $(o'x')$; úseky ty označme za příčinou stručnosti X, X'.

$$\xi=\frac{(ho)+(ox)}{(ko)+(ox)}=\frac{\lambda+X}{\mu+X}, \quad \xi'=\frac{\lambda'+X'}{\mu'+X'},$$

píšeme-li λ, μ, λ', μ' místo stálých délek (ho), (ko), $(h'o')$, $(k'o')$. Tím relace (1) přejde do relace

$$a\frac{\lambda+X}{\mu+X}\frac{\lambda'+X'}{\mu'+X'}+b\frac{\lambda+X}{\mu+X}+c\frac{\lambda'+X'}{\mu'+X'}+d=o,$$

čili, po odstranění jmenovatelů a po seřadění,

(2) $$AXX'+BX+CX'+D=o,$$

kde za příčinou stručnosti položeno

$$A=a+b+c+d, \qquad B=(a+c)\lambda'+(b+d)\mu',$$
$$C=(a+b)\lambda+(c+d)\mu, \quad D=(a\lambda+c\mu)\lambda'+(b\lambda+d\mu)\mu'.$$

Snadno vypočteme, že

$$AD-BC=(ad-bc)(\mu-\lambda)(\mu'-\lambda')\gtrless o,$$

jelikož

$$\mu-\lambda=(ko)-(ho)=(ko)+(oh)=(kh)\gtrless o, \quad \mu'-\lambda'=(k'h')\gtrless o.$$

Stanoví tedy relace (2) mezi body x, x' vztah projektivný, jak bylo dokázati.

Obdobně by se ukázalo, že relace (1) stanoví mezi řadami vztah projektivný, má-li jedna z hodnot ξ, ξ' význam úseku a druhá význam dělícího poměru.

29. Počtářské stanovení projektivnosti svazků.

Libovolný element X svazku paprskového stanoven dělícím poměrem jeho $\xi=sin\,(AX):sin\,(BX)$ vzatým vzhledem k dvěma pevným elementům A, B, a obdobně buď ξ' dělící poměr libovolného paprsku X' jiného svazku vzhledem k A', B'.

Relace tvaru

(1) $$a\xi\xi' + b\xi + c\xi + d = o$$

při $ad - bc \gtrless o$ *stanoví vztah projektivný mezi oběma svazky, a naopak jest každý jich vztah projektivný dán relaci tohoto tvaru.*

Stačí protnouti první svazek libovolnou transversalou v řadě $abx\ldots$ perspektivné k $ABX\ldots$, a obdobně druhý svazek transversalou v řadě $a'b'x'\ldots$ (π) $A'B'X'\ldots$ Dle čl. 7. jsou ξ a ξ' úměrny dělícím poměrům $\frac{(ax)}{(bx)}$, $\frac{(a'x')}{(b'x')}$, jež stručně označme ξ_0, ξ'_0, t. j. $\xi = \lambda\xi_0$, $\xi' = \lambda'\xi'_0$;

λ, λ' značí dvě stálé. Tím relace (1) přejde do

$$a\lambda\lambda'\xi_0\xi'_0 + b\lambda\xi_0 + c\lambda'\xi'_0 + d = o,$$

z níž patrný projektivný vztah mezi x a x'; z toho ale plyne i projektivnost vztahu mezi paprsky X a X'. A naopak následuje z projektivného vztahu mezi paprsky X a X' patrně i projektivný vztah mezi body x a x', a tedy relace

$$a_0\xi_0\xi'_0 + b_0\xi_0 + c_0\xi_0 + d_0 = o,$$

z níž plyne ihned

$$\frac{a_0}{\lambda\lambda'}\xi\xi' + \frac{b_0}{\lambda}\xi + \frac{c_0}{\lambda'}\xi' + d_0 = o,$$

t. j. relace tvaru (1).

Nyní jest již patrné, že relace (1) při $ad - bc \gtrless o$ charakterisuje projektivný vztah mezi kterýmikoli dvěma základnými útvary prvního řádu, jsou-li ξ, ξ' dělící poměry sdružených elementů, stanovené vzhledem k libovolně voleným základným elementům, a že naopak každý projektivný vztah lze takovou relací vytknouti. Jest-li uvažovaný útvar řada bodová, lze příslušnou proměnnou ξ neb ξ' pojímati též jako úsečku bodu této řady.

30. Centrálné a samodružné elementy, stanovené počtářsky; elementy imaginarné.

Projektivný vztah dvou řad buď vytčen relací

(1) $$a\xi\xi' + b\xi + c\xi' + d = o, \qquad ad - bc \gtrless o,$$

v níž ξ, ξ' nechť značí úsečky (ox), $(o'x')$ dvou sdružených bodů, počítané od dvou libovolně volených základných bodů o resp. o' těchto řad, a budiž výslovně podotknuto, že body o, o' obecně nejsou sdružené, ač jsou označeny touž literou.

Abychom nalezli centrálný bod druhé řady, odvoďme z (1)

$$\xi' = -\frac{b\xi + d}{a\xi + c} = -\frac{b + \frac{d}{\xi}}{a + \frac{c}{\xi}}$$

a položme $lim\, \xi = \infty$; limita podílů $\frac{d}{\xi}$, $\frac{c}{\xi}$ jest pak o, a $lim\, \xi'$ patrně $-\frac{b}{a}$. Přísluší tedy nekonečně vzdálenému bodu p_∞ řady první v řadě druhé bod v úsečce

$$\xi' = -\frac{b}{a};$$

to jest bod centrálný p' řady druhé. — Obdobně plyne, že

$$\xi = -\frac{c}{a}$$

jest úsečka centrálného bodu q řady první, při čemž ovšem předpokládáme, že jmenovatel a obou vypočtených zlomků není nullou.

V případě $a = o$ nabývá relace (1) jednoduššího tvaru

(2) $$b\xi + c\xi' + d = o,$$

a dle předchozí úvahy lze tušiti, že v tomto případě nekonečně vzdálenému bodu přísluší opět bod v nekonečnu, t. j. že projektivné řady jsou podobné; a skutečně plyne z (2) a z rovnice

$$b\eta + c\eta' + d = o$$

platné mezi úsečkami dalších dvou sdružených bodů,

$$b(\eta - \xi) + c(\eta' - \xi') = o,$$

z čehož $$\frac{\eta - \xi}{\eta' - \xi'} = -\frac{c}{b},$$

čili $$\frac{(oy) - (ox)}{(o'y') - (o'x')} = \frac{(xy)}{(x'y')} = -\frac{c}{b} = \text{stálé},$$

a z toho jest podobnost řad patrna.

Jsou-li dané projektivné řady soumístné, lze měřiti úsečky sdružených bodů od téhož základního bodu o; položivše tedy $(ox) = \xi$, $(ox') = \xi'$, bude projektivný vztah dán opět relací tvaru (1). Dva sdružené body x, x' splynou při $\xi = \xi'$, tak že *úsečky samodružných bodů jsou kořeny kvadratické rovnice*

(2) $$a\xi^2 + (b + c)\xi + d = o,$$

t. j. jsou to hodnoty $\xi = \frac{-(b + c) \pm \sqrt{(b + c)^2 - 4ad}}{2a}$.

Mají tedy soumístné projektivné řady v případě $(b + c)^2 - 4ad > o$ dva, v případě $(b + c)^2 - 4ad = o$ jeden, a v případě

Zvláštní pozornosti zasluhuje paprsek oběma svazkům společný. Blíží-li se paprsek prvního svazku A, B, .. poloze P, též druhým vrcholem procházející, tu se bod na kružnici $a, b, ..$ blíží bodu o', a paprsek A', B', .. se blíží tečně kružnice ve vrcholu o'; *přísluší tudíž společnému paprsku P, počítanému do prvního svazku, ve svazku druhém tečna P' sestrojená ve vrcholu druhého svazku.* To se ovšem shoduje se známým faktem, že úhel $\overset{\wedge}{AP}$ se rovná úhlu $\overset{\wedge}{A'P'}$, jejž svírá A' s tečnou v bodě o'. — Obdobně přísluší společnému paprsku Q', počítanému do druhého svazku, v prvním tečna Q bodu o.

Patrně platí také opak, t. j. *dva shodné, souhlasné svazky v téže rovině, jež nejsou v poloze perspektivné, vytvořují kružnici, procházející oběma vrcholy.*

39. Kružnice, vytvořená projektivnými řadami.

Volme dvě libovolné tečny O, O' kružnice (obr. 41.) za řady bodové a stanovme mezi nimi následující vztah. Libovolným bodem a řady první prochází mimo O ještě jedna tečna kružnice A, která nechť protne O' v bodě a'; tento bod přiřaďme bodu a. Vztah tak stanovený jest projektivný; označíme-li s střed kružnice, p, q' dotyčné body tečen O, O' a α dotyčný bod tečny A, máme patrně

$$\overset{\wedge}{asa'} = \overset{\wedge}{as\alpha} + \overset{\wedge}{\alpha sa'} = \tfrac{1}{2}\overset{\wedge}{ps\alpha} + \tfrac{1}{2}\overset{\wedge}{\alpha sq'},$$

t. j.

$$\overset{\wedge}{asa'} = \tfrac{1}{2}\overset{\wedge}{psq'};$$

úhel sevřený paprsky $\overline{sa}$, $\overline{sa'}$ jest tedy stálý, t. j. svazek paprsků $\overline{sa}$, $\overline{sb}$, .. jest shodný se svazkem paprsků $\overline{sa'}$, $\overline{sb'}$ ... Z toho soudíme ale ihned, že také řada ab.. jest projektivná s řadou a', b' ...

Blíží-li se bod a na řadě O bodu dotyčnému p, blíží se druhá tečna, bodem a vedená, patrně tečně O, tak že bodu p první řady přísluší bod p' oběma řadám společný. Totéž ovšem ukazuje okolnost, že s paprskem $\overline{sp}$ prvního svazku uzavírá paprsek $\overline{sp'}$ onen stálý sklon $\tfrac{1}{2}\overset{\wedge}{psq'}$. — Obdobně přísluší společnému bodu obou řad, počítanému do řady první a označenému q, v řadě druhé bod dotyčný q'.

Tečny kružnice protínají dvě pevné tečny v sdružených bodech dvou projektivných řad (jež se promítají ze středu dvěma shodnými svazky); *dotyčné body pevných tečen přísluší společnému jich*

bodu. Kružnici lze tedy pokládati za čáru vytvořenou dvěma projektivnými řadami a sice v tom smyslu, že spojnice sdružených bodů těchto řad jsou tečnami kružnice. Ovšem nelze tvrditi, že by každé dvě projektivné řady vytvořily kružnici.

40. Křivá řada a křivý svazek na kružnici.

Souhrn všech bodů kružnice nazveme křivou řadou bodovou na kružnici; každý z oněch bodů jest elementem křivé řady.

Souhrn všech tečen kružnice nazveme křivým svazkem na kružnici, a ony tečny (paprsky) elementy jeho.

Projektivnost těchto útvarů definujeme takto:*)

Křivá řada na kružnici jest projektivná s nějakým útvarem, je-li s ním projektivný svazek, jímž se křivá řada promítá z libovolného bodu kružnice.

Křivý svazek na kružnici jest projektivný s nějakým útvarem, je-li s ním projektivná řada, v níž křivý svazek protíná libovolnou tečnu kružnice.

Aby definice byly přípustny, musí projektivnost býti nezávislá na libovolně voleném bodě resp. libovolně volené tečně kružnice; a tomu tak skutečně jest dle úvahy předešlého článku. Je-li totiž $a, b, c, \ldots$ křivá řada na kružnici, a $A, B, C, \ldots$ svazek, jímž se promítá z bodu o téže kružnice, $A', B', C', \ldots$ svazek promítající řadu z jiného bodu o' kružnice, jsou svazky shodné, a projektivnost jednoho s nějakým útvarem má za následek projektivnost druhého, s týmž útvarem.

Připojíme-li ještě definice:

Dvojpoměrem čtyř bodů křivé řady na kružnici rozumíme dvojpoměr čtyř paprsků, jimiž se tyto body z libovolného bodu kružnice promítají,

Dvojpoměrem čtyř tečen křivého svazku na kružnici rozumíme dvojpoměr čtyř bodů, v němž tyto tečny libovolnou tečnu kružnice protínají,

jest patrné, že rovnost dvojpoměrů sdružených elementů zůstává v platnosti i pro projektivný vztah křivých řad a svazků na kružnici.

Spojíme-li v posledním obrazci bod p s body $\alpha, \beta, \ldots$, obdržíme paprsky $\overline{p\alpha} \perp \overline{sa}$, $\overline{p\beta} \perp \overline{sb}, \ldots$ a jest tedy svazek $\overline{p\alpha}, \overline{p\beta}, \ldots$ shodný se svazkem $\overline{sa}, \overline{sb}, \ldots$ a tudíž i projektivný s řadou $a, b, \ldots$ Dle definicí právě vytknutých lze tedy říci, že křivá řada $\alpha, \beta, \ldots$

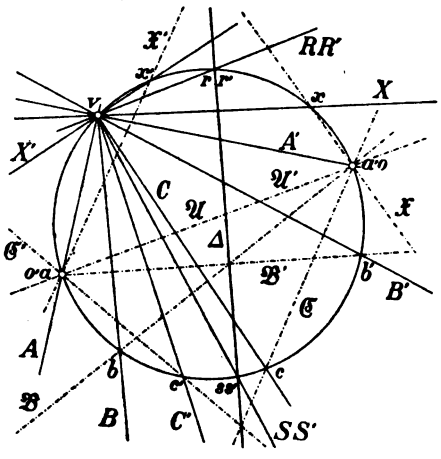
*) Sr. *Göpel*, Ueber Projectivität der Kegelschnitte als krummer Gebilde, Crelle t. XXXVI.

jest projektivná s křivým svazkem $A, B, \ldots$ t. j. *křivá řada bodová na kružnici jest projektivná s křivým svazkem tečen v její bodech sestrojených.*

41. Strojení samodružných paprsků a samodružných bodů.

Mějme dva soumístné projektivné svazky $ABC \ldots \pi A'B'C' \ldots$ (obr. 42.) a položme si úlohu, *sestrojiti jich elementy samodružné v případě, kdy jsou reálné.*

Obr. 42.



Společným vrcholem v obou svazků veďme libovolnou kružnici, již nechť protnou paprsky prvního svazku mimo v v bodech $abc \ldots$, a paprsky druhého v bodech $a'b'c' \ldots$

Promítneme-li křivou řadu $abc \ldots$ z nějakého bodu o kružnice, obdržíme svazek $\mathfrak{ABC} \ldots$ shodný se svazkem $ABC \ldots$, a promítnutím řady $a'b'c' \ldots$ z nějakého bodu o' kružnice svazek $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}' \ldots$ shodný se svazkem $A'B'C' \ldots$; oba nové svazky budou pak projektivné. Za příčinou řešení naší úlohy hleďme příhodnou volbou vrcholů o, o' docíliti perspektivnou polohu těchto svazků; to se stane, položíme-li na př. o do a', o' do a, jelikož se pak stotožní dva sdružené paprsky $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$. Perspektivná osa Δ svazků $\mathfrak{ABC} \ldots (\pi)$ $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}' \ldots$ jest spojnice bodů $(\mathfrak{BB}')$, $(\mathfrak{CC}')$ aneb, v jiném označení, spojnice bodů $(\overline{ab'}\ \overline{ba'})$, $(\overline{ac'}\ \overline{ca'})$.

K libovolnému elementu X sestrojíme sdružený X', vytkneme-li bod x, v němž X kružnici mimo o protíná, paprsek $\mathfrak{x}$, jímž se z pomocného vrcholu o promítá, jemu perspektivně příslušný paprsek $\mathfrak{x}'$ svazku o', a bod x', jejž na kružnici stanoví; jím prochází hledaný paprsek X'. Konstrukci lze patrně stručněji vystihnouti výrokem, že se bod $(\overline{ax'}\ \overline{xa'})$ nalézá na ose Δ.

Aby se dva sdružené paprsky X, X' sjednotily, jest nutné a stačí, aby se příslušné body x, x' sjednotily; poněvadž se přímky $\overline{ax'}$, $\overline{a'x}$ protínají na Δ, sjednotí se body x, x' jen v bodě, v němž Δ protíná kružnici. *Protne-li Δ kružnici v bodech $r \equiv r'$,*

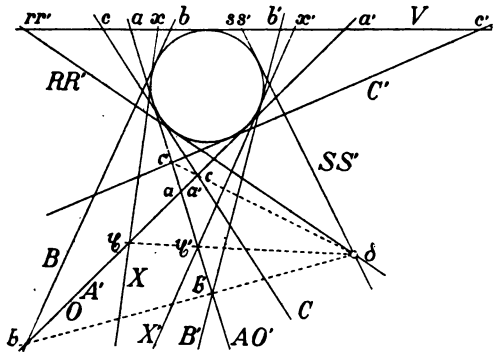
$s \equiv s'$, *procházejí jimi hledané samodružné paprsky* $R \equiv R'$, $S \equiv S'$ *daných soumístných svazků; dotýká-li se* Δ *kružnice, nalézáme dva splývající samodružné paprsky, a nesetká-li se s ní, mají svazky dva imaginárné samodružné elementy.* Kdybychom byli vrcholy o, o' pomocných svazků položili do bodů b' resp. b, byli bychom obdobně shledali, že obecně průsečík $(\overline{bx'}\ \overline{xb'})$ jest na pevné přímce, jejíž společnými body s kružnicí procházejí samodružné elementy R, S; jsou-li r, s body reálné, jest totožnost této pevné přímky s přímkou Δ patrna. A obecně plyne touto úvahou, že průsečík $(\overline{xy'}\ \overline{yx'})$ jest na přímce Δ; ovšem plyne to za supposice, že osa Δ kružnici protíná. Výrok sám platí však v každém případě, jakož později stvrdíme.

Právě nalezenou konstrukci lze též s jiného stanoviska pojímati. Křivá řada $abc\ldots$ jest dle předešlého článku projektivná s řadou soumístnou $a'b'c'\ldots$, a samodružnými elementy $r \equiv r'$, $s \equiv s'$ těchto řad procházejí samodružné elementy $R \equiv R'$, $S \equiv S'$ daných svazků, jakož i sdruženými body x, x' sdružené paprsky X, X' daných svazků. Strojení těchto i oněch se tedy děje dle věty:

Jsou-li $abc\ldots$, $a'b'c'\ldots$ *dvě křivé řady projektivné na téže kružnici, tu se nalézají průsečíky* $(\overline{ab'}\ \overline{a'b})$, $(\overline{ac'}\ \overline{a'c}), \ldots, (\overline{bc'}\ \overline{b'c}), \ldots$ *na jedné přímce* Δ, *ose direkční obou řad; její průsečíky s kružnicí jsou samodružné body daných řad.*

Jde-li o sestrojení samodružných bodů dvou projektivných soumístných řad $abc\ldots \pi\ a'b'c'\ldots$ lze úkol ten převésti na úkol předchozí; promítneme-li totiž řady z libovolného bodu dvěma svazky $ABC\ldots$, $A'B'C'\ldots$, jsou tyto též projektivné, a stačí sestrojiti jich samodružné paprsky $R \equiv R'$, $S \equiv S'$. Tyto paprsky protnou řady v hledaných samodružných bodech.

Obr. 43.



Přímá konstrukce, reciproká k předešlé, jest založena na druhé projektivné vlastnosti kružnice.

Sestrojme (obr. 43.) kružnici, dotýkající se osy V daných soumístných řad. Body $abc\ldots$ procházejí ke kružnici,

mimo V, po jedné tečně, již označíme resp. $ABC..$, a obdobně $A'B'C'..$ tečny procházející body $a'b'c'..$ Dle definice předešlého článku jest křivý svazek $ABC..$ projektivný s křivým svazkem $A'B'C'..$, a libovolné tečny O, O' je protnou v řadách projektivných. Za tyto transversaly volme dvě sdružené tečny na př. A, A' a sice učiňme $O \equiv A'$, $O' \equiv A$.

Tečna O protniž paprsky $ABC..$ v bodech $abc..$, a tečna O' paprsky $A'B'C'..$ v bodech $a'b'c'...$ Projektivné řady $abc.. \pi a'b'c'..$ mají dva splývající sdružené body $a \equiv a'$, a jsou tedy perspektivné, t. j. spojnice $\overline{bb'}$, $\overline{cc'}..$ procházejí jedním bodem δ, aneb jinak řečeno, spojnice $\overline{(AB')(A'B)}$, $\overline{(AC')(A'C)}$,.. procházejí jedním bodem δ.

Libovolný paprsek, perspektivným středem δ vedený, stanoví na řadách O, O' dva sdružené body ξ, ξ', jimiž procházejí dvě sdružené tečny, stanovící na V dva sdružené body x, x' daných řad; což stručně vyjádříme, řekneme-li, že $\overline{(AX')(X'A)}$ prochází bodem δ.

Aby sdružené body x, x' splynuly, jest nutné a stačí, by X, X' splynuly, t. j. by ξ, ξ' byly na tečně; vedeme-li tedy bodem δ ke kružnici tečny, stanoví tyto na řadách O, O' sdružené body r, r' resp. s, s', jež vedou k splývajícím sdruženým tečnám $R \equiv R'$, $S \equiv S'$. *Tečny bodem δ ke kružnici vedené, protínají tedy řadu V v hledaných samodružných bodech $r \equiv r'$, $s \equiv s'$.* Je-li bod δ mimo kružnici, mají řady dva samodružné body, je-li na kružnici, mají dva splývající samodružné body, a je-li uvnitř kružnice, nemají reálných samodružných bodů.

Kdybychom byli za pomocné řady O, O' zvolili přímky B', B, byli bychom obdobně nalezli, že spojnice $\overline{(BX')(B'X)}$ procházejí pevným bodem, jímž procházejí tečny R, S, stanovící na V body samodružné; z čehož v případě reálných samodružných bodů můžeme usouditi totožnost tohoto pevného bodu s bodem δ. A obecně plyne touto úvahou, že spojnice $\overline{(XY')(X'Y)}$ prochází bodem δ, ovšem přesně jen pro případ reálných samodružných bodů. Že výrok platí v každém případě, ukážeme později.

Přihlédneme-li k okolnosti, že $ABC.. \pi A'B'C'..$ jsou libovolné projektivné křivé svazky, lze právě vyvinutou konstrukci sdružených a samodružných jich elementů X, X' resp. $R \equiv R'$, $S \equiv S'$ vysloviti takto:

Jsou-li $ABC...$, $A'B'C'..$ dva křivé svazky projektivné na

téže kružnici, tu procházejí spojnice $\overline{(AB')(A'B)}$, $\overline{(AC')(A'C)}$, .., $\overline{(BC')(B'C)}$, .. *jedním bodem* δ, *středem direkčním obou svazků; tečny tímto bodem procházející jsou samodružné paprsky křivých svazků.*

42. Úlohy geometrické druhého stupně.

Stanovení samodružných elementů projektivných soumístných řad neb svazků se počtem dělo řešením kvadratické rovnice, bylo dvojí a vymáhalo při konstruktivné cestě použití kružnice a přímky. Geometrické úkoly tohoto rázu slují úkoly druhého stupně, na rozdíl od úkolů prvního stupně čili lineárných, jež se konstruktivně řeší pomocí pouhého pravítka, a jež počtem vymáhají řešení rovnic lineárných, tak že řešení jest vždy jen jediné a ovšem realné. Na př. úkol, stanoviti ke třem bodům čtvrtý harmonický, jest úkolem lineárným; taktéž lineárným jest úkol, stanoviti na dvou soumístných projektivných řadách neb svazcích druhý samodružný element, je-li jeden již znám (čl. 24.), jakož i počtářsky vychází, že stanovení druhého kořene kvadratické rovnice, znám-li jeden, závisí na lineárné rovnici, poněvadž součet neb součin obou kořenů jest znám.

Úkoly kvadratické v podstatě se redukují na stanovení samodružných elementů projektivných soumístných útvarů, a jich řešení lze pomocí kružnice, třeba pevné, docíliti; lze totiž útvary ty promítáním a sečením patrně převésti na soumístné projektivné řady neb svazky na dané kružnici. *)

Úkolů druhého stupně s řešeními se v následujících úvahách vyskytne značný počet; zde stůj, pro objasnění methody, jen následující:

Sestrojiti trojúhelník tak, aby byl danému trojúhelníku vepsán a současně jinému danému trojúhelníku opsán.

Buďte O, O', O'' strany prvního a o, o', o'' vrcholy druhého daného trojúhelníku. Libovolný bod x řady O promítněme z o na O' do bodu x', a tento z o' na O'' do bodu x'' a tento z o'' opět na O do bodu x_0. Proběhne-li x řadu O, proběhne x' řadu perspektivnou na O', a x'' řadu k této perspektivnou na O'', a konečně x_0 řadu s touto perspektivnou na O. Jsou tedy x, x_0

*) Sr. *Poncelet*, Traité des propriétés projectives des figures, p. 187, *Steiner*, Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, Werke I, p. 461.

sdružené body dvou projektivných řad na přímce O, a splynou-li dva takové body, vzniká trojúhelník $xx'x''$, jehož strany procházejí danými body o, o', o'' a jehož vrcholy jsou na daných přímkách O, O', O''.

Sestrojíme-li k třem bodům x sdružené x_0, jest projektivnost soumístných řad vytknuta; sestrojíme-li pak samodružné jich body, podává každý jedno řešení problemu. Má tedy úkol obecně řešení dvě, po případě imaginárná; kdyby tři body x splynuly se sdruženými x_0, splynul by každý se sdruženým, a bylo by lze vrchol x žádaného trojúhelníku na O libovolně voliti (sr. čl. 21.).

Není-li vytknut pořad, v jakém strany hledaného trojúhelníka mají procházeti danými body, a v jakém se jeho rohy mají nalézati na daných přímkách, jest řešení ovšem větší počet.

Touž methodou lze patrně řešiti obecnější úkol:

Sestrojiti polygon tak, aby jeho rohy byly na daných přímkách a jeho strany procházely danými body.

43. Strojení samodružných paprsků involuce; involuce bodová na kružnici.

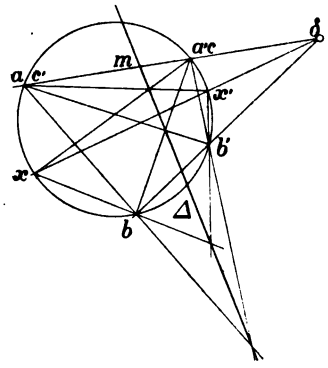
Dána-li involuce paprsková dvěma páry A, A'; B, B', lze ji pokládati za souhrn dvou projektivných svazků $ABC..$ π $A'B'C'..$, učiníme-li na př. $C \equiv A'$, $C' \equiv A$.

Kružnici, vedenou vrcholem svazků, protnou svazky ve dvou projektivných involutorných řadách $abc..$ π $a'b'c'..$; jest totiž patrné, že involutorný paprskový pár $X \equiv Y'$, $X' \equiv Y$, podává involutorný pár bodový $x \equiv y'$, $x' \equiv y$ na kružnici. A právě tak jest opak patrný, t. j. že se dvě soumístné involutorné řady na kružnici promítají z libovolného bodu kružnice dvěma involutornými svazky.

Dle článku 41. se nalézají průsečíky $(\overline{ab'}\ \overline{a'b})$, $(\overline{ac'}\ \overline{a'c}), ..,$ $(\overline{bc'}\ \overline{b'c}), ..$ na jedné přímce Δ (obr. 44); při tom značí $\overline{ac'}$ tečnu kružnice v bodě a, $\overline{a'c}$ její tečnu v bodě a'. Vzhledem k spojitosti vztahu projektivného (čl. 4.) jest totiž patrné, že bodu c_0 nekonečně blízkému ku c přísluší v druhé řadě bod c'_0 nekonečně blízký k c'; průsečík $(\overline{ac'_0}\ \overline{a'c_0})$ se ale nalézá na Δ, nechť si jest c_0 sebe bližší k bodu c, a c'_0 k c', t. j. nechť si $\overline{ac'_0}$ jest sebe bližší k tečně v a, a $\overline{a'c_0}$ k tečně v bodě a', čímž výrok stvrzen.

Libovolný bod x má involutorně sdružený x', jenž plyne z výroku, že $(ax\ a'x)$ jest na Δ, aneb že $(cx'\ c'x)$ jest na Δ. Z obou výroků patrno, že Δ jest diagonálnou stranou úplného čtyrrohu $aa'xx'$; označíme-li δ protější diagonálný roh, a m průsečík strany $\overline{aa'}$ s Δ, jsou $aa'm\delta$ čtyři harmonické body. Z nich jsou první tři pevny, nechť sestrojíme kterýkoli pár x, x', a jest tedy i čtvrtý δ pevným bodem, t. j. *spojnice xx' sdružených bodů involuce na kružnici procházejí pevným bodem δ, středem bodové involuce.*

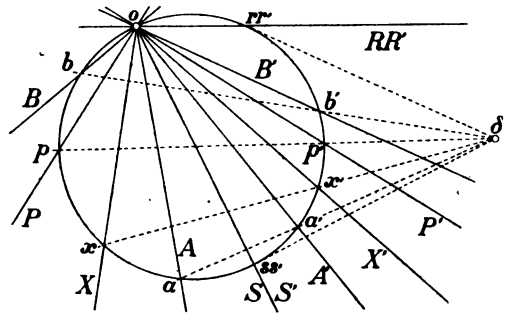
Obr. 44.



Každý paprsek, bodem δ vedený, protne kružnici ve dvou involutorně sdružených bodech; samodružné body involuce jsou tedy dotyčné body tečen, vedených středem δ. Body ty jsou ovšem i průsečíky $r \equiv r'$, $s \equiv s'$ osy Δ s kružnicí. — Dvojné body r, s oddělují harmonicky každé dva sdružené body x, x' (čl. 35.), t. j. body r, s, x, x' se promítají z libovolného bodu kružnice čtyřmi harmonickými paprsky.

Jde-li nyní o konstrukci sdružených, samodružných a centrálných paprsků involuce, dané dvěma páry A, A'; B, B' (obr. 45.), stačí vésti vrcholem o svazků libovolnou kružnici a vytknouti body a, a'; b, b', jež tyto paprsky, mimo vrchol, na kružnici stanoví. Spojnice $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$ se protnou ve středu δ bodové involuce a, a'; b, b'. Libovolný paprsek X svazku vytkne na kružnici bod x, spojnice $\overline{x\delta}$ protne kružnici v x', a jím prochází sdružený paprsek X'. Tečny, bodem δ vedené, se dotknou kružnice v samodružných bodech $r \equiv r'$, $s \equiv s'$, jimiž procházejí samodružné paprsky $R \equiv R'$, $S \equiv S'$. — Spojnice bodu δ se středem kružnice stanoví na kružnici bodový pár p, p', jenž se z vrcholu svazku patrně

Obr. 45.



promítá pravoúhlým párem involuce $P \perp P'$, čímž nalezeny centrálné paprsky involuce. Zároveň na novo patrno, že takový pravoúhlý pár obecně existuje jediný; má-li jich existovati více, pak se musí střed involuce δ stotožniti se středem kružnice, a pak jest patrně každý pár paprskové involuce pravoúhlým.

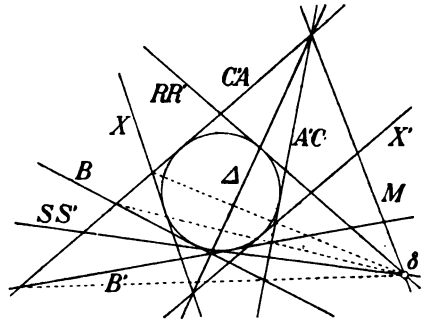
44. Strojení samodružných bodů involuce; involuce paprsková na kružnici.

Dána-li na přímce V involuce bodová dvěma páry a, a'; b, b', lze ji pokládati za souhrn dvou soumístných projektivných řad $abc\ldots \pi\ a'b'c'\ldots$, učiníme-li na př. $c \equiv a'$, $c' \equiv a$.

Kružnice, dotýkající se přímky V, stanoví s řadami dva projektivné involutorné křivé svazky $ABC\ldots \pi\ A'B'C'\ldots$, totiž tak, že tyto paprsky jsou tečny kružnice resp. body $abc\ldots$, $a'b'c'\ldots$ mimo V procházející. Tyto křivé svazky jsou dle čl. 40. projektivné, a zároveň involutorné, jelikož involutornému páru bodovému $x \equiv y'$, $x' \equiv y$ patrně přísluší involutorný pár paprskový $X \equiv Y'$, $X' \equiv Y$. To ukazuje také, že platí i opak, t. j. že soumístné involutorné svazky na kružnici stanoví na libovolné tečně dvě involutorné řady bodové.

Dle článku 41. procházejí přímky $\overline{(AB')(A'B)}$, $\overline{(AC')(A'C)}$, .., $\overline{(BC')(B'C)}$, .. jedním bodem δ (obr. 46.); při tom značí (AC') dotyčný bod tečny A, totiž její průsečík s tečnou soumeznou, a $(A'C)$ dotyčný bod tečny A'.

Obr. 46.



K libovolné tečně X involutorně sdruženou X' nalezneme, uvážíme-li, že přímka $\overline{(AX')(A'X)}$ prochází bodem δ, aneb i, že přímka $\overline{(CX')(C'X)}$ tím bodem prochází. Z obou výroků patrno, že δ jest diagonálným rohem úplného čtyrstranu $AA'XX'$: označíme-li Δ protější diagonálnou stranu, a M spojnici rohu (AA') s δ, jsou tedy $AA'M\Delta$ čtyři harmonické paprsky.

Z nich jsou první tři pevny, nechť sestrojíme kterýkoli pár X, X' involuce, a jest tedy i čtvrtý paprsek Δ pevným,

t. j. *sdružené paprsky* X, X' *involuce na kružnici se protínají na jedné přímce* Δ, *ose involuce paprskové na kružnici.*

Vedeme-li libovolným bodem osy Δ tečny ke kružnici, obdržíme pár paprsků naší involuce; tyto paprsky splynou, je-li bod osy Δ zároveň na kružnici; samodružné paprsky involuce jsou tedy tečny sestrojené v bodech průsečných osy Δ s kružnicí; paprsky ty $R \equiv R'$, $S \equiv S'$ jsou ovšem též tečnami, vedenými středem δ.

Kterak užiti této věty ke konstrukci bodové involuce a, a'; b, b' na přímce V jest patrné; stačí vésti kružnici, dotýkající se V, a sestrojiti tečny A, A', B, B' danými body procházející. Body (AA'), (BB') jsou na ose Δ křivé involuce A, A'; B, B', na niž se protínají každé dva sdružené paprsky X, X'; ty pak podávají páry x, x' bodové involuce. Protne-li Δ kružnici ve dvou bodech, jsou tečny v nich samodružnými elementy v paprskové involuci, a na nich leží dvojné body dané involuce; neprotne-li Δ kružnici, jsou samodružné elementy obou involucí imaginárné.

Jinak lze úkol řešiti tím, že z libovolného bodu promítneme dané projektivné řady involutorné dvěma involutornými svazky, a úkol převedeme na úlohu řešenou v předešlém článku. Tak se obyčejně děje, zvlášť v případu, kdy dané involutorné řady jsou na přímce nekonečně vzdálené.

45. Společný pár dvou soumístných involucí.

Dána-li involuce paprsková A, A'; B, B' o vrcholu o, a druhá involuce paprsková A_0, A'_0; B_0, B'_0 v téže rovině a o témž vrcholu, tedy soumístná, vzniká otázka, zda-li existuje pár paprskův oběma involucím společný.

Vedeme-li vrcholem o libovolnou kružnici, stanoví dané involuce paprskové na ní dvě soumístné involuce bodové a, a'; b, b' resp. a_0, a'_0; b_0, b'_0; průsečík δ přímek $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$ jest středem první, a průsečík δ_0 přímek $\overline{a_0a'_0}$, $\overline{b_0b'_0}$ jest středem druhé involuce. Protne-li spojnice středů $\overline{\delta\delta_0}$ kružnici ve dvou bodech x, x', tvoří tyto a jen tyto pár bodový oběma involucím společný; body těmi procházejí pak paprsky X, X' sdružené v obou daných involucích paprskových.

Je-li alespoň jeden z bodů δ, δ_0 uvnitř kružnice, jsou body x, x' reálné; jsou-li oba mimo kružnici, mohou x, x' býti reálné, ale také imaginárné.

Poněvadž lze případ dvou soumístných involucí bodových převésti na dvě soumístné involuce paprskové, máme tento výsledek:

Dvě soumístné involuce mají jeden společný pár sdružených elementů; týž jest vždy reálný, kdy alespoň jedna z involucí jest elliptická; jsou-li obě hyperbolické, může býti reálným, ale též imaginárným.

Totéž plyne, převedeme-li soumístné bodové involuce pomocí kružnice, dotýkající se řady, na dvě paprskové involuce na této kružnici.

Konečně jest patrné, že hledaný společný pár musí oddělovati harmonicky dvojné elementy jak jedné, tak druhé involuce; on tedy se skládá z dvojných elementů involuce, dané oběma páry dvojných elementů.

V elliptické involuci existuje ku každému páru jeden harmonický pár téže involuce. Mějme na př. elliptickou paprskovou involuci AA'; BB' a veďme jejím vrcholem kružnici, na níž nechť involuce stanoví bodovou involuci aa'; bb'. Střed $\delta \equiv (\overline{aa'}\ \overline{bb'})$ této elliptické involuce jest uvnitř kružnice. Všecky bodové páry na kružnice, jež oddělují harmonicky a, a', tvoří páry involuce, jejíž dvojnými body jsou a, a'; tečny v těchto bodech sestrojené se protnou ve středu δ' této involuce. Spojnice $\overline{\delta\delta'}$, procházejíc vnitřním bodem δ, protne kružnice v jediném páru bodovém, jenž náleží dané involuci a zároveň odděluje harmonicky a, a'. — V hyperbolické involuci neexistuje reálný pár, jenž by daný pár elementů harmonicky oddělovaly, jelikož se žádné dva reálné páry hyperbolické involuce vůbec neoddělují.

V elliptické involuci bodové existuje jeden pár sdružených bodů stejně vzdálených od bodu centrálného, a v elliptické involuci paprskové jeden pár sdružených paprsků stejně nakloněných k paprskům centrálným.

Je-li o centrálný bod involuce, o'_∞ její nekonečně vzdálený bod, jsou podvojné body řady, položené po různých stranách bodu o a od něho stejně vzdálené, harmonické k o, o'_∞ a tedy páry involuce. Společný pár této a dané involuce jest onen, o němž věta jedná. Značíme-li libovolný pár dané involuce a, a', jest $(oa)(oa') = -h^2$ potence její, a hledaný pár x, x' takový, že $(ox') = -(ox)$ a $(ox)(ox') = -h^2$, t. j. $(ox)^2 = h^2$; jest tedy jak délka $\overline{ox}$, tak $\overline{ox'}$ střední měřická úměra mezi vzdálenostmi $\overline{oa}$, $\overline{oa'}$ dvou sdružených bodů od bodu centrálného.

Dána-li involuce paprsková, stanovme její centrálné paprsky P, P', a protněme ji přímkou T kolmou k P, tedy rovnoběžnou s P'; involuce bodová vznikající na T má centrálný bod $o \equiv (TP)$, jelikož $o' \equiv (TP')$ jest v nekonečnu. Sestrojíme-li v bodové involuci body x, x' právě vytknuté, promítnou se tyto z vrcholu involutorného svazku patrně dvěma sdruženými paprsky X, X' k paprskům P i P' stejně nakloněnými. — K témuž cíli dospějeme, protneme-li danou involuci paprskovou kružnicí, vedenou vrcholem, v křivé involuci bodové. Je-li δ střed její a s střed kružnice, stanoví $\overline{\delta s}$ na kružnici body p, p', jimiž procházejí centrálné paprsky P, P'; přímka vedená kolmo k $\overline{\delta s}$ bodem δ stanoví na kružnici dva body, a jen ta, jimiž procházejí dva sdružené paprsky X, X' k centrálným P, P' stejně nakloněné.

Kapitola VI.

Čáry a kužele druhého řádu.

46. Perspektivný vztah dvou rovinných soustav.

Promítneme-li body kružnice z libovolného středu, položeného mimo rovinu kružnice, na jinou rovinu, naplní jich průměty čáru, jejíž studium bude hlavní applikací dosavadní theorie promětných útvarů. Za tou příčinou uvážíme v tomto a v následujícím článku rovinné obrazce, vznikající promítáním jiných rovinných obrazců.

Promítneme-li (čl. 3.) body, paprsky a vůbec libovolné obrazce daného rovinného systému ϱ z nějakého bodu o na jinou rovinu ϱ', obdržíme jich perspektivné obrazy; naopak lze též obrazce roviny ϱ pokládati za perspektivné obrazy oněch, jež jsou v rovině ϱ'. Bod o sluje středem perspektivným. Jsou-li a, a' dva perspektivně sdružené body, prochází jich spojnice $\overline{aa'}$ středem perspektivným, a body sdružené a, a' jsou tedy řezy téhož paprsku promítajícího s rovinami ϱ, ϱ'; obdobně jsou perspektivně sdružené paprsky řezy téže roviny, bodem o procházející, s rovinami ϱ, ϱ'. Definici perspektivných soustav ϱ, ϱ' můžeme tudíž takto vysloviti:

Dvě rovinné soustavy jsou perspektivné, jsou-li řezy téhož svazku prostorového.

Povaha vztahu perspektivného vychází přímo z definice.

Naplní-li bod soustavy ϱ přímou řadu $abc\ldots$ na přímce P, naplní promítající paprsek $\overline{oa}$, $\overline{ob}$, $\overline{oc}, \ldots$ svazek, a jeho stopa na ϱ' opět přímou řadu $a'b'c'\ldots$, perspektivnou s řadou první. Značí-li m průsečík první řady s přímkou $\overline{\varrho\varrho'}$, jest m' svým vlastním obrazem m', a tímto bodem prochází tedy přímka P'.

Přímkám $P, Q, R, \ldots$, vedeným v ϱ jedním bodem a, přísluší v ϱ' přímky $P', Q', R', \ldots$ procházející ovšem bodem a', a každé dvě sdružené přímky se protínají na $\overline{\varrho\varrho'}$. Svazku $PQR\ldots$ přísluší tedy svazek perspektivný $P'Q'R'\ldots$; osa perspektivná jest přímka $\overline{\varrho\varrho'}$.

Naplní-li bod v rovině ϱ nějakou čáru Σ, naplní perspektivně sdružený bod v ϱ' příslušnou čáru Σ'; obě čáry jsou řezy téhož kužele o vrcholu o. Protne-li Σ osu $\overline{\varrho\varrho'}$, prochází Σ' těmito průsečnými body. Dvěma blízkým bodům a, b čáry Σ přísluší dva blízké body a', b' čáry Σ', a přímce $\overline{ab}$ ovšem přímka $\overline{a'b'}$; je-li a pevný a $\lim b \equiv a$, jest i a' pevný a $\lim b' \equiv a'$, dále jest limitní poloha přímky $\overline{ab}$ tečnou čáry Σ, a limitní poloha přímky $\overline{a'b'}$ tečnou čáry Σ'. Z toho jde ale ihned, *že tečně čáry Σ v bodě a přísluší perspektivně tečna čáry Σ' v sdruženém bodě a'.*

Naplní-li paprsek v rovině ϱ nějakou čáru Σ, t. j. je-li v každé poloze své tečnou této čáry, naplní perspektivně sdružený paprsek v rovině ϱ' čáru Σ', jež sluje perspektivně sdruženou s čarou Σ. Jsou-li A, B dvě polohy paprsku v ϱ, A', B' sdružené paprsky v ϱ', jsou body (AB), $(A'B')$ sdruženy. Pokládáme-li A za pevný paprsek, B za proměnný, blížící se poloze A, jest limitní poloha průsečíku (AB) bodem dotyčným paprsku A s čarou Σ; patrně této limitní poloze přísluší limitní poloha průsečíku $(A'B')$ perspektivně, z čehož patrno, *že dotyčnému bodu tečny čáry Σ přísluší perspektivně dotyčný bod sdružené tečny čáry Σ'.*

Jsou-li tedy dvě čáry Σ, Σ' jakožto čáry bodové perspektivně sdruženy, jsou též perspektivně sdruženy jakožto čáry paprskové, a naopak.

Zvláštní pozornosti zasluhují body, jichž perspektivně sdružené jsou v nekonečnu. Bod a' jest v nekonečnu, je-li promítající paprsek $\overline{oa}$ rovnoběžný s rovinou ϱ'. Všecky takové paprsky naplní rovinu ω' rovnoběžnou s ϱ' a bodem o procházející; její průsečná přímka Q s rovinou ϱ obsahuje veškeré body, jichž perspektivně sdružené na ϱ' jsou v nekonečnu, t. j. přímce Q přísluší přímka Q'_∞. Přímky Q a $\overline{\varrho\varrho'}$, jakožto řezy rovnoběžných rovin $\omega' \parallel \varrho'$ s rovinou ϱ, jsou ovšem rovnoběžné.

Vedeme-li obdobně středem perspektivným o rovinu $\omega \parallel \varrho$, protne tato rovinu ϱ' v přímce $P' \parallel \overline{\varrho\varrho'}$, jíž přísluší v ϱ perspektivně přímka v nekonečnu P_∞; každému bodu b' na P' přísluší totiž bod b_∞ na promítajícím paprsku $\overline{ob'}$ v nekonečnu položený.

Přímky Q a P', jimž perspektivně přísluší přímky nekonečně vzdálené, nazveme centrálnými přímkami soustav ϱ resp. ϱ'; obě jsou rovnoběžny s *perspektivnou osou* $\overline{\varrho\varrho'}$.

47. Soumístné rovinné soustavy perspektivné.

V předešlém článku jsme předpokládali, že roviny ϱ, ϱ' jsou různé, kteráž supposice při dané definici jich perspektivného vztahu byla podstatná. Otočíme-li jednu z rovin ϱ, ϱ', aneb obě kolem přímky $\overline{\varrho\varrho'}$ jim společné až splynou, obdržíme dva soumístné rovinné systémy, nalézající se v jistém vztahu, jejž nyní blíže vyšetříme. Jsou-li dané roviny ϱ, ϱ' rovnoběžné, nelze o otočení kolem přímky $\overline{\varrho\varrho'}$ mluviti; v tomto případě pošineme jednu neb obě roviny až splynou, při kterém šinutí si zůstávají ovšem rovnoběžny. V obou případech nazveme přemístění rovin ϱ, ϱ' jich sklopením do jedné roviny, připomínajíce, že v obou případech jsou body položené na $\overline{\varrho\varrho'}$ pevnými.

Jsou-li a, b, c tři libovolné body roviny ϱ, neležící na přímce, a', b', c' jim perspektivně příslušné body roviny ϱ', a protnou-li přímky $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{ca}$ osu $\overline{\varrho\varrho'}$ resp. v bodech r, p, q, protnou přímky $\overline{a'b'}$, $\overline{b'c'}$, $\overline{c'a'}$ osu $\overline{\varrho\varrho'}$ resp. v týchž třech bodech. Při sklopení rovin ϱ a ϱ' jsou body p, q, r pevny, a budou tedy jimi i sklopené přímky procházeti. Označíme-li sklopené body a, b, c, a',.. literami a_0, b_0, c_0, a'_0,.., jsou trojúhelníky $a_0b_0c_0$ a $a'_0b'_0c'_0$ v takové poloze, že se jich sdružené strany protínají na přímce $\overline{\varrho\varrho'}$; dle čl. 20. procházejí tedy spojnice sdružených vrcholů $\overline{a_0a'_0}$, $\overline{b_0b'_0}$, $\overline{c_0c'_0}$ jedním bodem o. Jsou-li x, x' dva další perspektivné body rovin ϱ, ϱ', a x_0, x'_0 body, do nichž po sklopení dospějí, plyne obdobně uvažováním trojúhelníků abx, $a'b'x'$, že přímky $\overline{a_0a'_0}$, $\overline{b_0b'_0}$, $\overline{x_0x'_0}$ procházejí jedním bodem, a tedy bodem o.

Sklopené perspektivné soustavy rovinné jsou tedy dle *Poncelet*-ova názvu *) *homologickými* aneb *soumístně perspektivnými*, poněvadž platí definice:

Homologie přiřaduje bodům a přímkám roviny body a přímky

*) *Poncelet*, Traités des propriétés projectives des figures, Paris 1822.

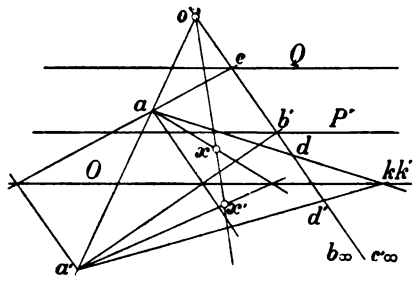
téže roviny takovým způsobem, že spojnice sdružených bodů procházejí jedním bodem, středem homologie, a že sdružené přímky se protínají na jedné přímce, ose homologie.

Pojem sklopených perspektivných soustav se kryje s pojmem homologických soustav, jelikož *každé dva homologické rovinné systémy lze pokládati za sklopené perspektivné systémy.* Jsou-li totiž a, b, c tři body jednoho systému, a', b', c' jim homologicky přiřaděné druhého, procházejí přímky aa', bb', cc' jedním bodem o, a nalézají se průsečíky $(ab\ a'b')$, $(bc, b'c')$, $(ca\ c'a')$ na jedné přímce O. Otočíme-li na př. druhý systém kolem osy O o libovolný úhel, budou tyto průsečíky při otáčení pevny, a dospějí-li body a', b', c' do poloh a'_0, b'_0, c'_0, budou se sdružené přímky ab, $a'_0b'_0$; bc, $b'_0c'_0$; ca, $c'_0a'_0$ na O protínati. Prochází tudíž prvními čtyřmi body rovina, druhými čtyřmi rovina a třetími čtyřmi rovina; společným bodem s těchto tří rovin procházejí tři průsečnice rovin t. j. přímky aa'_0, bb'_0, cc'_0. Nyní plyne obdobně jako nahoře, že bodem s prochází spojnice každých dvou sdružených bodů x, x'_0, t. j. že první soustava a otočená druhá jsou perspektivné, jak bylo dokázati.

Přísluší-li bodům a přímkám roviny body a přímky téže roviny takovým způsobem, že spojnice sdružených bodů procházejí pevným bodem, jest vztah ten, homologií, neboť dle věty o perspektivných trojúhelnících (čl. 20.) plyne ihned, že se sdružené přímky protínají na pevné přímce; *taktéž jest homologií vztah, jenž bodům a přímkám přiřaďuje body a přímky tak, že se sdružené přímky protínají na pevné přímce,* jelikož pak dle citované věty procházejí spojnice sdružených bodů jedním bodem.

Homologický vztah jest vytčen, jakmile vytkneme střed o, osu O homologie a dva sdružené body a, a', jichž spojnice ovšem musí procházeti bodem o (obr. 47.). Pak lze totiž k libovolnému bodu x sestrojiti sdružený x'; týž jest totiž na paprsku ox a pak na přímce družené s přímkou ax, tedy procházející bodem a' a protínající se s ní na ose O. Že pak spojnice sdružených bodů procházejí bodem o, jest patrné, a že se každé dvě sdružené přímky protínají na O, ukazuje věta, již citovaná z čl. 20.

Obr. 47.



V obrazci sestrojen tímto

způsobem bod b' příslušný bodu b_∞; bodem b' rovnoběžně s osou O vedená přímka P' přísluší přímce nekonečně vzdálené P_∞, a jest tedy centrálnou přímkou druhého systému. Počítajíce bod b_∞ do druhého systému, značíme jej c'_∞; v obrazci jest sestrojen příslušný bod c prvního systému, a jim vedena centrálná přímka Q, ovšem rovnoběžně s osou homologie O.

Homologie přiřaďuje libovolné řadě bodové $ax\,..$ řadu $a'x'\,..$ s ní perspektivnou, a střed o jest středem perspektivným; jen v případě, kdy řada na př. $b_\infty cd\,..$ prochází středem o, přísluší jí soumístná, s ní ovšem projektivná řada $b'c'_\infty d'\,..$; projektivnost patrna z toho, že to jsou sklopené řady perspektivné, ale i přímo z konstrukce, která ukazuje, že svazky promítající tyto řady z bodův a resp. a', jsou perspektivné. Každý paprsek, bodem O vedený, přísluší sobě, a tudíž i bod o. — Libovolnému svazku přísluší svazek s ním perspektivný a O jest osa perspektivná; jen svazku o vrcholu o přísluší svazek s ním totožný, a svazku o vrcholu na ose O položeném, svazek soumístný, s ním projektivný, jako na př. svazku $\overline{kb_\infty}$, $\overline{kd}$, $\overline{kc}$, $\overline{ko}$,.. svazek $\overline{k'b'}$, $\overline{k'd'}$, $\overline{k'c'_\infty}$, $\overline{k'o'}$,..

48. Čáry homologické s kružnicí: kuželosečky.

Kuželosečkou zoveme každou rovinnou čáru, již lze vytvořiti jakožto centrálný průmět kružnice, tedy jakožto řez kruhového kužele, t. j. kužele vedeného kružnicí, s rovinou neprocházející vrcholem kužele. Každá kuželosečka jest tedy čára příslušná kružnici perspektivně; poněvadž perspektivné systémy sklopením se stávají homologickými, a naopak homologické otočením perspektivnými, *jest každá čára homologická s kružnicí kuželosečkou, a naopak.*

Poněvadž ve dvou perspektivných soustavách přísluší bodu bod, přímce přímka, tečně čáry tečna perspektivně sdružené čáry, jest patrné, *že kuželosečku*, tak jako kružnici, *libovolná přímka protne buď ve dvou bodech, neb v jednom bodě* (čili ve dvou splývajících) *jsouc tečnou čáry, aneb ve dvou imaginárných bodech*, jakož že *libovolným bodem v rovině kuželosečky procházejí dvě tečny její, neb jen jedna* (čili dvě splývající), *je-li totiž bod na čáře, aneb dvě imaginárné tečny.* Vzhledem k první okolnosti jest kuželosečka čarou prvního stupně, a vzhledem k druhé jest současně čarou druhé třídy; udává totiž stupeň algebraické

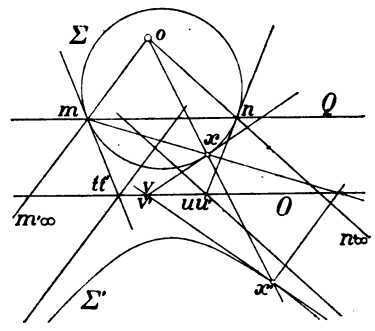
čáry v rovině počet její průsečíků s libovolnou přímkou a třída počet její tečen, procházejících libovolným bodem.

Kuželosečky dělíme na tři druhy: protíná-li kuželosečka nekonečně vzdálenou přímku své roviny ve dvou bodech, sluje *hyperbolou*, protíná-li ji ve dvou splývajících bodech, t. j. dotýká-li se jí, sluje *parabolou*, a protíná-li ji ve dvou imaginárných bodech, sluje *ellipsou*.

Vytvoříme-li kuželosečku Σ' jakožto čáru homologickou k dané kružnici Σ, snadno rozhodneme, jakého jest druhu. Protíná-li Σ centrálnou přímku Q svého systému ve dvou bodech m, n, má Σ' s přímkou v nekonečnu dva společné body m'_∞, n'_∞ a jest tedy hyperbolou; dotýká-li se kružnice Σ centrálné osy v bodě m, dotýká se Σ' přímky v nekonečnu v bodě m'_∞, a jest tedy parabolou; neprotíná-li Σ centrálnou osu Q, jest Σ' bez nekonečně vzdáleného bodu reálného a tudíž ellipsou.

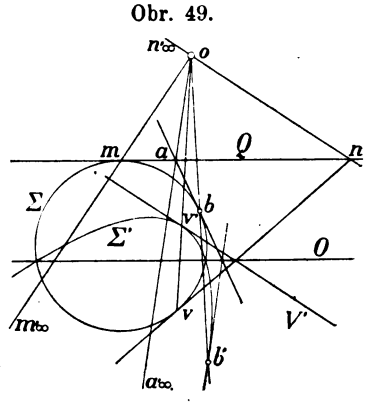
V obr. 48. naznačen první případ, kdy Σ' jest hyperbolou. Homologie vytčena středem o, osou O a centrálnou přímkou Q; vytknouti tuto přímku, ovšem rovnoběžně s osou O, jest právě tolik, jako přiřaditi některému jejímu bodu, na př. m, bod m'_∞ v nekonečnu. Tečnám kružnice $\overline{mt}$, $\overline{nu}$ v bodech m, n *přísluší tečny* $\overline{m'_\infty t'}$, $\overline{n'_\infty u'}$ *kuželosečky v bodech nekonečně vzdálených* $\overline{m'_\infty}$, $\overline{n'_\infty}$ *t. j. její asymptoty*. Bod x' příslušný libovolnému bodu x kružnice sestrojen pomocí družiny m, m'_∞; jeho tečna $\overline{x'v'}$ přísluší tečně kružnice $\overline{xv}$, s níž se na ose O protíná.

Obr. 48.



V obr. 49. naznačen případ třetí, kdy kružnice Σ se dotýká centrálné osy Q v bodě m, kdy tedy Σ' jest parabolou. Tato se dotýká v bodě m'_∞, na přímce $\overline{om}$ položeném, nekonečně vzdálené přímky Q'_∞. Libovolným bodem a centrálné osy prochází mimo ni ještě jedna tečna $\overline{ab}$ ke kružnici, a tedy prochází libovolným bodem

Obr. 49.



a'_∞ v nekonečnu mimo Q'_∞ ještě jedna tečna $\overline{a'_\infty b'}$ paraboly. V obrazci sestrojena tečna paraboly V', kolmá ku přímce $\overline{om'_\infty}$, čili tak zvaná vrcholová tečna; ona prochází nekonečně vzdáleným bodem n'_∞ kolmice $\overline{on'_\infty}$ k $\overline{om'_\infty}$ vedené, a jest tedy sestrojena jakožto přímka homologická k tečně kružnice, vedené bodem n. Její dotyčný bod v' jest vrcholem paraboly.

49. Dvě základní vlastnosti kuželoseček.

Uvážíme-li, že kuželosečka jest homologická čára ke kružnici, a dále, že homologie řadám a svazkům přiřaďuje opět řady a svazky s oněmi projektivné, plynou z projektivných vlastností kružnice (čl. 38. a 39.) tyto dvě základní vlastnosti kuželoseček:

Body kuželosečky se promítají ze dvou libovolných pevných bodů této čáry sdruženými paprsky dvou projektivných svazků; společnému paprsku svazků přísluší tečny ve vrcholech.

Tečny kuželosečky protínají dvě libovolné pevné tečny v sdružených bodech dvou projektivných řad; společnému bodu řad přísluší jich dotyčné body.

Body o, o', a, b, c, .. dané kuželosečky Σ jsou totiž homologické k bodům o_0, o'_0, a_0, b_0, c_0, .. jisté kružnice Σ_0; paprskům A, B, C.. promítajícím z o body a, b, c,.. přísluší homologicky paprsky A_0, B_0, C_0,.. promítající z o_0 body a_0, b_0, c_0,.., a paprskům A', B', C'... promítajícím z o' body a, b, c.. přísluší homologicky paprsky A'_0, B'_0, C'_0,.. promítající z o'_0 body a_0, b_0, c_0,... Jest tedy svazek $ABC..\pi A_0B_0C_0..$, a svazek $A'B'C'..\pi A'_0B'_0C'_0...$ Ale svazek $A_0B_0C_0..$ jest dle čl. 38. shodný se svazkem $A'_0B'_0C'_0..$, a tedy svazek $ABC..\pi A'B'C'..$, jak bylo dokázati. Že společnému paprsku svazků o, o' přísluší tečny ve vrcholech o, o', vychází ihned z čl. 39.

Zcela podobně plyne správnost věty na pravé straně umístěné.

Tyto dvě základní věty připouštějí ihned následující definici:*)

Souhrn bodů na kuželosečce sluje křivou řadou čili řadou druhého řádu. Řada taková jest projektivná s nějakým útvarem,

Souhrn tečen kuželosečky sluje křivým svazkem čili svazkem druhého řádu. Svazek takový jest projektivný s nějakým útvarem,

*) *Göpel*, Über Projectivität der Kegelschnitte als krummer Gebilde, Crelle, t. XXXVI.

je-li s ním projektivný svazek, jímž se řada z libovolného bodu kuželosečky promítá.

Dvojpoměrem čtyř bodů řady druhého řádu rozumíme dvojpoměr paprsků, jimiž se body ty z libovolného bodu kuželosečky promítají.

Dvojpoměr čtyř bodů řady druhého řádu se rovná dvojpoměru elementů příslušných v útvaru projektivném.

je-li s ním projektivná řada, v níž svazek libovolnou tečnu kuželosečky protíná.

Dvojpoměrem čtyř paprsků svazku druhého řádu rozumíme dvojpoměr bodů, v nichž paprsky ty protínají libovolnou tečnu kuželosečky.

Dvojpoměr čtyř paprsků svazku druhého řádu se rovná dvojpoměru elementů příslušných v útvaru projektivném.

Z poslední věty čl. 40. plyne ihned obecnější věta:

Body kuželosečky tvoří řadu druhého řádu projektivnou se svazkem druhého řádu, jejž tvoří tečny téže kuželosečky sestrojené v oněch bodech.

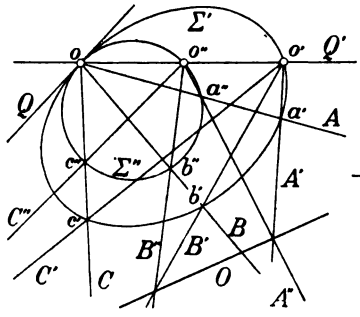
50. Čára vytvořená dvěma projektivnými svazky. Čáry druhého stupně.

Mějme (obr. 50.) v téže rovině dva projektivné svazky $ABC..$ a $A'B'C'..$ o vrcholech o, o', a předpokládejme výslovně, že nejsou v poloze perspektivné, t. j., že společnému paprsku Q' obou svazků přísluší v prvním paprsek Q nesplývající se společným.

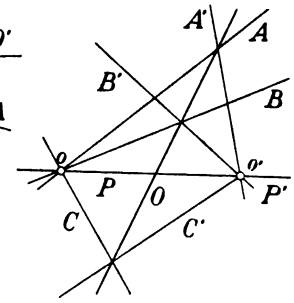
Svazky vytvoří jistou čáru Σ' jakožto geometrické místo průsečíků $a', b', c', ..$ sdružených paprsků; čára Σ' prochází oběma vrcholy o, o', poněvadž vrchol o se jeví jakožto průsečík sdružených paprsků Q, Q', a vrchol o' jakožto průsečík sdružených paprsků P, P', značí-li P společný paprsek svazků, počítaný do prvního z nich.

Sestrojme kružnici Σ'', dotýkající se paprsku Q ve vrcholu o. Přímka $\overline{oo'}$ protne ji mimo o ještě v jednom bodě o'' — ovšem za učiněné supposice, že paprsek Q jest různý od paprsku Q'. Bod o'' zvolme za vrchol pomocného svazku $A''B''C''..$, jejž tak sestrojíme, by se svazkem o vrcholu o vytvořoval kružnici Σ''; protínají se tedy paprsky $A'', B'', C'', ..$ resp. s paprsky $A, B, C..$ na kružnici Σ'' v bodech $a'', b'', c'', ..$ Dle čl. 38. jest svazek $ABC..$ shodný se svazkem $A''B''C''..$, a tečně Q kružnice přiřaděn tímto vztahem paprsek Q'' oběma svazkům společný.

Obr. 50.



Obr. 51.



Ze vztahů $ABCQ\ldots \pi A'B'C'Q'\ldots$,
$ABCQ\ldots \pi A''B''C''Q''\ldots$,
soudíme, že $A'B'C'Q'\ldots \pi A''B''C''Q''\ldots$, a poněvadž $Q' \equiv Q''$, že oba poslední svazky jsou v poloze perspektivné, t. j. že se průsečíky $(A'A'')$, $(B'B'')$, $(C'C'')$,.. nalézají na jedné přímce O.

Zvolme bod o za střed, přímku O za osu homologie, jež přiřaďuje bodu o'' bod o'. Pak přísluší homologií bodu a'' bod a', bodu b'' bod b', atd., t. j. kružnici Σ'' čára Σ'. Jest tedy Σ' kuželosečkou, jak bylo dokázati.

Kuželosečka Σ' se dotýká ve vrcholu o paprsku Q; stačí sestrojiti bod homologický m' k bodu m'' kružnice sousednímu k o, a přihlédnouti k tomu, že při $\lim m'' \equiv o$ též $\lim m' \equiv o$, a že limitní poloha obou spojnic $\overline{om''}$, $\overline{om'}$ jest patrně Q. Ostatně platí obecný výrok, že *čára vytvořená dvěma svazky, jež souvisí vztahem spojitým, prochází vrcholy svazků a že se v nich dotýká paprsků, příslušných společnému paprsku obou svazků.* Je-li totiž P společný element obou svazků, a P' jemu příslušný element druhého svazku, jeví se vrchol o' jakožto průsečík (PP') a jest tedy na vytvořené čáře. Je-li nyní R paprsek prvního svazku, blížící se poloze P, tedy $\lim R \equiv P$, bude též $\lim R' \equiv P'$, a bod (RR') čili r stále na čáře. Jelikož $\overline{o'r} \equiv R'$, jest $\lim \overline{o'r} \equiv P'$ t. j. tečna čáry ve vrcholu o' jest skutečně paprsek P', přiřaděný společnému paprsku P obou svazků.

Vezměme nyní v úvahu dva *perspektivné* svazky o, o' v téže rovině. Sdružené jich paprsky se protínají na ose perspektivné, vyjma jich společný paprsek; ten jest sobě přiřaděn a nelze tedy o průsečíku s příslušným paprskem jednati. Každý bod však tohoto společného paprsku jest současně na dvou sdružených paprscích, a naplňují tedy společné body sdružených paprsků (AA'), (BB'),.. (PP'),.. osu perspektivnou O (obr. 51.)

a společný paprsek $\overline{oo'}$ obou svazků. Soustavu přímek O a $\overline{oo'}$ lze tedy pokládati za čáru vytvořenou oběma svazky. Čáru tu připočteme ke kuželosečkám bodovým a nazveme ji *zvrhlou* čili *degenerovanou kuželosečkou neb čarou druhého stupně.* Také ji lze vytvořiti jakožto rovinný řez kruhového kužele, a to s rovinou, vedenou vrcholem kužele.

Tím máme větu:

Dva projektivné svazky v téže rovině, jež nejsou perspektivné, vytvořují kuželosečku, procházející jich vrcholy a dotýkající se v nich paprsků, jež přísluší projektivně společnému paprsku obou svazků.

Dva perspektivné svazky v téže rovině vytvořují zvrhlou kuželosečku, složenou ze dvou přímek: z osy perspektivné a ze spojnice obou vrcholů.

Kuželosečky vlastní a zvrhlé, složené ze dvou přímek, označíme společným názvem jakožto *čáry druhého stupně.*

Promítnutím dvou projektivných svazků v rovině na jinou rovinu obdržíme v této opět dva projektivné svazky; čára těmito vytvořená jest arci průmětem čáry, vytvořené prvními dvěma svazky, z čehož plyne:

Centrálný průmět kuželosečky na libovolnou rovinu jest opět kuželosečka.

51. Čára vytvořená dvěma projektivnými řadami. Čáry druhé třídy.

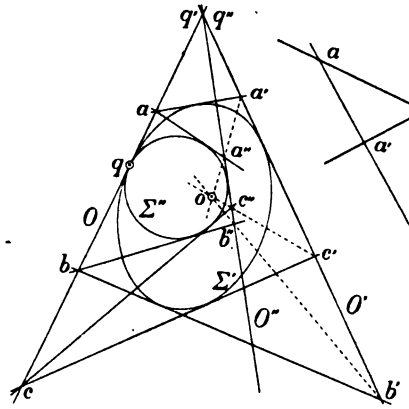
Mějme (obr. 52.) v rovině dvě projektivné řady $abc\ldots\pi\ a'b'c'\ldots$, na přímkách O, O' a předpokládejme nejprve, že nejsou perspektivné, že tedy jich společnému bodu q' přísluší v první řadě bod q nesplývající s bodem společným.

Řady ty vytvořují jistou čáru Σ', t. j. spojnice sdružených bodů $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$, $\overline{cc'}$,.. jsou tečnami A', B', C',.. vytvořené čáry; čára ta se dotýká obou řad O a O', poněvadž přímka O se jeví jakožto spojnice $\overline{qq'}$ dvou sdružených bodů, a taktéž O' jakožto spojnice $\overline{pp'}$, značí-li p společný bod obou řad, počítaný do první, a p' jemu projektivně přidružený bod řady druhé.

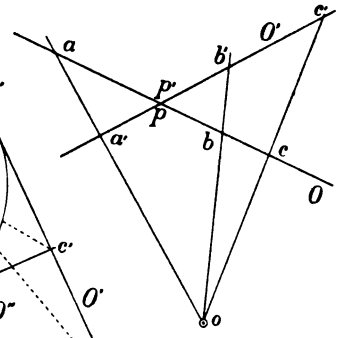
Sestrojme kružnici Σ'' dotýkající se osy O v bodě q, a veďme k ní bodem q' druhou tečnu O'', jež tedy s tečnou O nesplývá vzhledem k různosti bodů q a q'. Body a, b, c,.. procházejí ke kružnici mimo O tečny A'', B'', C'',..., jež protínají O' v bodech a'', b'', c'',.. Řady $abcq\ldots$, $a''b''c''q''\ldots$ vznikající na dvou tečnách O, O'' kružnice jsou dle čl. 39. projektivné; první z nich jest ale projektivná s řadou $a'b'c'q'\ldots$, a jsou tedy

také řady $a''b''c''q''\ldots$, $a'b'c'q'\ldots$ projektivné a sice, vzhledem ku $q'' \equiv q'$, v perspektivné poloze. Procházejí tedy spojnice $\overline{a'a''}$, $\overline{b'b''}$, $\overline{c'c''}$,.. jedním bodem o.

Obr. 52.



Obr. 53.



Zvolme o za střed, O za osu homologie a přiřaďme bodu a'' bod a'; pak patrně přímce O'' přísluší O', bodům a'', b'', c'',.. resp. body a', b', c',.., a tedy přímkám $\overline{aa''}$, $\overline{bb''}$,.. resp. přímky $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$.. Jeví se tedy tečny čáry Σ' jakožto přímky homologické k tečnám kružnice, t. j. čára Σ' jest kuželosečkou (čl. 46.). Tečna O jakožto osa homologie jest samodružna, a taktéž její body, tedy i dotyčný bod q kružnice Σ''; jest tedy O též tečnou čáry Σ' a sice se jí dotýká v bodu q.

Platí ostatně obecný výrok, že *čára vytvořená dvěma řadami téže roviny, souvislými vztahem spojitým, se dotýká obou řad a sice v bodech přiřaděných společnému jich bodu.* Jsou-li totiž dané řady na přímkách O, O', a přísluší-li jich společnému bodu p, jakožto řady první, v řadě druhé bod p', tu přísluší bodu r řady první blížícímu se bodu p, v řadě druhé bod r', blížící se bodu p'. Spojnice $\overline{pp'} \equiv O'$, $\overline{rr'} \equiv R$ jsou tečny vytvořené čary, a r' jest průsečík obou tečen. Pro $lim\ r \equiv p$ jest $lim\ r' \equiv p'$, a ovšem $lim\ R \equiv O'$; avšak $p' \equiv lim\ r'$ jest $lim\ (O'R)$, t. j. limitní poloha průsečíku tečny O' s nekonečně blízkou tečnou, čili dotyčný bod tečny O', jak bylo tvrzeno.

Vezměme nyní v úvahu dvě *perspektivné* řady O, O' v téže rovině (obr. 53.). Svazky ty vytvoří opět tečnovou čáru v tom smyslu, že každý paprsek procházející dvěma sdruženými body řad O, O' pokládáme za tečnu vytvořené čáry. Spojnice sdruže-

ných bodů $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$, $\overline{cc'}$, .. procházejí perspektivným středem o obou řad, vyjma sdružené body splývající p, p'. O jich spojnici nelze ovšem mluviti, avšak pojem paprsku dva sdružené body obsahujícího potrvá, a patrně jest takovým paprskem *každý* paprsek vedený bodem $p \equiv p'$. Tečny čáry vytvořené perspektivnými řadami jsou tedy veškery přímky procházející buď bodem o aneb bodem p, a tvořící tedy dva svazky. Soustavu bodů o, p lze tedy pokládati za tečnovou čáru, řadami O, O' vytvořenou. Čáru tu připočteme k tečnovým kuželosečkám a nazveme ji *zvrhlou kuželosečkou* neb *zvrhlou čarou druhé třídy.*

Tím nalézáme větu:*)

Dvě projektivné řady v téže rovině, jež nejsou v poloze perspektivné, vytvořují kuželosečku, dotýkající se obou řad a to v bodech, jež přísluší projektivně společnému bodu obou řad.

Dvě perspektivné řady v téže rovině vytvořují zvrhlou kuželosečku složenou ze dvou bodů: ze středu perspektivného a z průsečíku obou řad.

Kuželosečky vlastní a zvrhlé, složené ze dvou bodů, označíme též společným názvem jakožto čáry druhé třídy. Centrálný průmět čáry druhé třídy jest opět čarou druhé třídy.

52. Strojení kuželosečky z pěti bodů neb z pěti tečen, t. j. strojení dalších bodů a tečen.

Pěti body, z nichž žádné tři nejsou na přímce, prochází jediná kuželosečka, a pěti přímek, z nichž žádné tři neprocházejí bodem, se dotýká jediná kuželosečka.

Prochází-li pěti body v rovině o, o', a, b, c, z nichž žádné tři nejsou na přímce, kuželosečka, musí jí dle čl. 49. vytvořiti projektivné svazky

$$\overline{oa}\ \overline{ob}\ \overline{oc}\ ..\ \pi\ \overline{o'a}\ \overline{o'b}\ \overline{o'c}\ ..;$$

avšak projektivnost těchto svazků jest vytčenými třemi páry sdružených paprsků úplně stanovena, a tím věta dokázána.

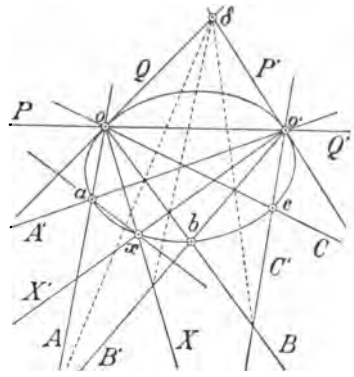
Je-li pět přímek v rovině O, O', A, B, C, z nichž žádné tři neprocházejí jedním bodem, tečnami kuželosečky, musí ji dle čl. 49. vytvořiti projektivné řady

$$(OA)\ (OB)\ (OC)\ ..\ \pi\ (O'A)\ (O'B)\ (O'C)\ ..;$$

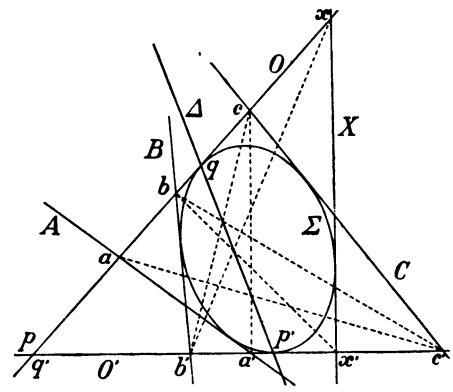
avšak projektivnost těchto řad jest vytčenými třemi páry sdružených bodů úplně stanovena, a tím věta dokázána.

*) Podnět k podanému důkazu této a předchozí základní věty dal *Chasles*-ovi inženýr *Delbolat*, jeho posluchač; v. *Chasles*, Traité des sections coniques, Paris 1865, pag. 7.

Obr. 54.



Obr. 55.



Další bod x kuželosečky obdržíme jakožto průsečík sdružených paprsků X, X' (obr. 54.), sestrojených pomocí direkčního středu δ obou svazků ABC.. π $A'B'C'$..

Paprsky bodem δ procházející Q, P' přísluší společnému paprsku $P \equiv Q'$, a jsou tedy $\overline{\delta o}$, $\overline{\delta o'}$ tečny kuželosečky ve vrcholech o, o'.

Poněvadž lze kterékoli dva z daných pěti bodů zvoliti za vrcholy svazků, jest tím řešen úkol:

Sestrojiti tečnu v daném bodě kuželosečky, vytknuté pěti body,

a zároveň řešena úloha:

Sestrojiti druhý průsečík x paprsku X s kuželosečkou, vedeného jedním bodem o této čáry, dané dalšími čyřmi body.

V obrazci sestrojen direkční střed δ jakožto společný bod přímek $\overline{(AB')(A'B)}$, $\overline{(BC')(B'C)}$; a paprsek X, projektivně pří-

Další tečnu X kuželosečky obdržíme jakožto spojnici sdružených bodů x, x' (obr. 55.), sestrojených pomocí direkční osy Δ obou řad abc.. π $a'b'c'$..

Body q, p' položené na ose Δ přísluší společnému bodu $p \equiv q'$, a jsou tedy (ΔO), $(\Delta O')$ dotyčné body kuželosečky s řadami O, O'.

Poněvadž lze kterékoli z daných pěti tečen zvoliti za řady, jest tím řešen úkol:

Sestrojiti k dané tečně kuželosečky bod dotyčný, je-li čára pěti tečnami vytčena,

a zároveň řešena úloha:

Sestrojiti druhou tečnu X kuželosečky z bodu x, daného na tečně této čáry, vytčené dalšími čtyřmi tečnami.

V obrazci sestrojena direkční osa Δ jakožto přímka obsahující body $(\overline{bc'}\ \overline{b'c})$, $(\overline{ac'}\ \overline{a'c})$; a bod x', projektivně pří-

slušný libovolnému paprsku X prvního svazku na základě výroku, že $(\overline{BX'})(\overline{B'X})$ prochází bodem δ. Lze patrně další body kuželosečky tak strojiti, že bodem δ vedeme libovolnou přímku, a že její průsečíky n. p. s B, B' promítneme resp. z vrcholu o', o; promítající paprsky jsou projektivně sdruženy a jich společný bod jest bodem kuželosečky.

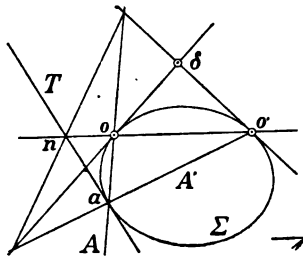
slušný libovolnému bodu x první řady, na základě výroku, že $(\overline{bx'}\ \overline{b'x})$ jest na Δ. Lze patrně další tečny kuželosečky tak strojiti, že na Δ zvolíme libovolný bod, a že jeho spojnicemi n. p. s b, b' protneme resp. řady O', O; průsečíky jsou projektivně sdružené body a jich spojnice jest tečnou kuželosečky.

Za příčinou přesnějšího rýsování kuželosečky jest záhodno sestrojiti v obrazci po levé straně v každém bodě čáry tečnu její, a v obrazci po pravé straně dotyčný bod každé narýsované tečny. Obojího dosáhneme následujícími úvahami:

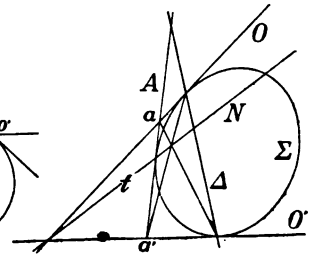
V úplném čtyřstranu $AA'XX'$ jsou diagonalnými stranami přímky $\overline{oo'}$, $\overline{ax}$, $(\overline{AX'})$ $(\overline{A'X})$; je li tedy m průsečík první a třetí z těchto diagonalných stran, jsou (čl. 18.) paprsky A, A', $\overline{ax}$, $\overline{am}$ harmonické. Blíží-li se paprsek X pevnému paprsku A, blíží se bod x bodu a, přímka $(\overline{AX'})$ $(\overline{A\,X})$ přímce $\overline{a\delta}$ a tudíž i přímka $\overline{am}$ přímce $\overline{a\delta}$, a spojnice $\overline{ax}$ tečně T v bodu a. *Oddělují tedy A, A' harmonicky tečnu T a spojnici $\overline{a\delta}$.*

V úplném čtyrrohu $aa'xx'$ jsou diagonálnými rohy body (OO'), (AX), $(\overline{ax'}\ \overline{a'x})$; je-li tedy M spojnicí prvního a třetího z těchto diagonálných rohů, jsou (čl. 18.) body a, a', (AX), (AM) harmonické. Blíží-li se bod x pevnému bodu a, blíží se paprsek X paprsku A, bod $(\overline{ax'}\ \overline{a'x})$ bodu $(A\Delta)$ a tudíž i bod (AM) bodu $(A\Delta)$, a průsečík (AX) dotyčnému bodu t tečny A. *Oddělují tedy a, a' harmonicky dotyčný bod t a průsečík $(A\Delta)$.*

Obr. 56.



Obr. 57.



Nejjednodušší konstrukci této harmonické přímky T podává úplný čtyrstran A, A', $\overline{\delta o}$, $\overline{\delta o'}$ (obr. 56.); skutečně jsou jeho strany A, A' harmonické k diagonálné straně $\overline{a\delta}$ a k spojnici T rohu a s diagonalným rohem n. Uvážíme-li, že body o, o', a jsou tři libovolné body kuželosečky, a že $\overline{o\delta}$, $\overline{o'\delta}$, $\overline{an}$ jsou tečny v těchto bodech, podává obrazec tuto větu:

Je-li tříroh kuželosečce vepsán, protínají se strany jeho s tečnami, sestrojenými v protějších vrcholech, na přímce.

Vytvoříme-li kuželosečku, procházející body o, o', a, b, c, svazky o, o', vidíme, že spojnice $(\overline{AB'})(\overline{A'B})$ prochází bodem δ t. j. že se protínají tečny bodů o, o' na spojnici bodů $(\overline{oa}\ \overline{o'b})$, $(\overline{ob}\ \overline{o'a})$; vytvoříme-li ji svazky a, b, soudíme, že se tečny bodů a, b protínají na spojnici týchž dvou bodů. Spojnice ta jest ale diagonálná strana úplného čtyrrohu $oo'ab$, čímž nalézáme důležitou větu, jejíž zobrazení zůstaveno čtenáři: *Tečny čtyř bodů kuželosečky o, o', a, b se protínají podvojně na diagonálných stranách úplného čtyrrohu $oo'ab$, t. j. tento čtyrroh a čtyrstran tečen mají společný diagonálný trojúhelník.*

Známy-li tečny v bodech o, o', podává věta ta ihned

Nejjednodušší konstrukci tohoto harmonického bodu t podává úplný čtyrroh a, a', (ΔO), $(\Delta O')$ (obr. 57.); skutečně jsou jeho rohy a, a' harmonické k diagonálnému rohu $(A\Delta)$ a k průsečíku t strany A s diagonálnou stranou N. Uvážíme-li, že přímky O, O', A jsou tři libovolné tečny kuželosečky, a že $(O\Delta)$, $(O'\Delta)$, (AN) jsou jich dotyčné body, podává obrazec tuto větu:

Je-li trojstran kuželosečce opsán, procházejí spojnice jeho vrcholů s dotyčnými body protějších stran jedním bodem.

Vytvoříme-li kuželosečku dotýkající se přímek O, O', A, B, C řadami O, O', vidíme, že průsečík $(\overline{ab'}\ \overline{a'b})$ se nalézá na ose Δ, t. j. že prochází spojnice dotyčných bodů tečen O, O' průsečíkem přímek $(\overline{OA})$ $(\overline{O'B})$, $(\overline{OB})(\overline{O'A})$; vytvoříme-li ji řadami A, B, soudíme, že prochází spojnice dotyčných bodů tečen A, B průsečíkem týchž dvou přímek. Průsečík ten jest diagonálný roh úplného čtyrstranu $OO'AB$, čímž nalézáme: *Dotyčné body čtyř tečen kuželosečky O, O', A, B mají spojnice procházející podvojně diagonálnými rohy úplného čtyrstranu $OO'AB$, t. j. tento čtyrstran a čtyrroh dotyčných bodů mají společný diagonálný trojúhelník.*

Známy-li dotyčné body dvou tečen O, O', podává věta

tečny v bodech a, b, čímž na novo řešen úkol předchozí.

ihned dotyčné body tečen A, B, a tedy nové řešení předchozí úlohy.

53. Strojení kuželosečky z pěti bodů: speciálné případy.

Speciálné případy, jež v tomto článku vytkneme, vznikají tím, že mezi danými pěti body se nalézají dva nekonečně blízké body aneb nekonečně vzdálené body.

Dán-li bod o s tečnou Q čáry, nahrazuje to dva body; lze totiž bod blízký bodu o a na tečně Q položený s tím větší přesností pokládati za bod čáry, čím bližším jest onen bod bodu o. *Jde-li o stanovení kuželosečky, stačí tedy další tři body* (obr. 54.) o', a, b. Skutečně, vytvoříme-li kuželosečku svazky o, o', jest projektivnost jich stanovena tím, že paprskům A, B, Q přísluší A', B', Q', při čemž Q' značí paprsek $\overline{o'o}$ oběma svazkům společný a příslušný tečně ve vrcholu o. Direkční střed δ jest průsečík paprsku Q se spojnicí (AB') $(A'B)$.

Dány-li dva body o, o' s tečnami Q, P' (obr. 54.), *a další bod a, jest kuželosečka stanovena*; vytvoří ji projektivné svazky o vrcholech o, o':

$$APQ\,..\;\pi\;A'PQ'\,..,$$

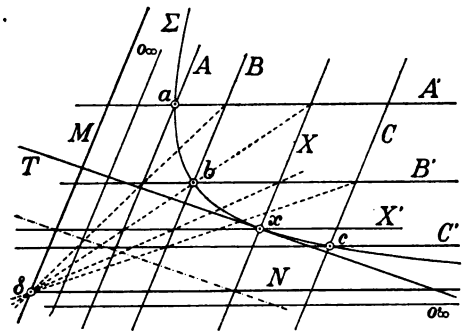
při čemž $P \equiv Q'$ značí paprsek oběma svazkům společný, a A, A' paprsky, promítající bod a z vrcholů o, o'. Konstrukce dalších bodů a jich tečen se ovšem děje tak jako v článku předchozím.

Známe-li nekonečně vzdálený bod kuželosečky, známe též směr tečny v onom bodě sestrojené, t. j. směr asymptoty kuželosečky; jen v případě, kdy kuželosečka jest parabolou, zapadá celá asymptota do nekonečna, a nelze o jejím směru mluviti. Tím, že jeden neb dva z daných bodů zapadají do nekonečna, vznikají speciálné úkoly tyto:

Nechť se sestrojí hyperbola, daná směry asymptot a třemi body. Buďte M, N (obr. 58.) přímky udávající směry asymptot, a, b, c další tři body hyperboly. Body o_∞, o'_∞ nekonečně vzdálené přímek M, N zvolme za vrcholy svazků $ABC\,..\;\pi\;A'B'C'\,..$ hyperbolu vytvořujících a sestrojme další bod x a jeho tečnu T dle čl. předchozího. Direkčním středem δ obou svazků procházejí tečny ve vrcholech o_∞, o'_∞ t. j. asymptoty $\overline{\delta o_\infty}$, $\overline{\delta o'_\infty}$.

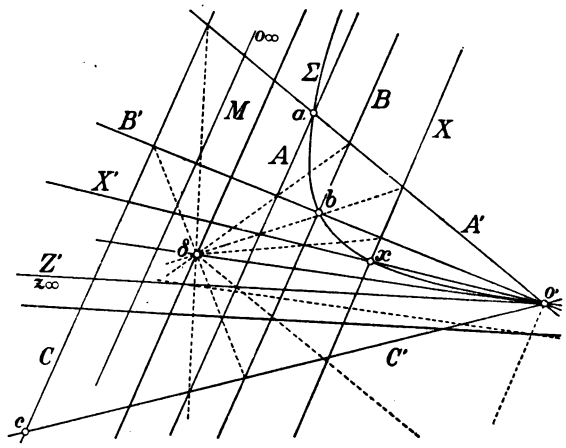
Nechť se sestrojí hyperbola, daná směrem jedné asymptoty a čtyřmi body. — Buď M (obr. 59.) přímka stanovící směr jedné

Obr. 58.



asymptoty, o', a, b, c další čtyři body hyperboly. Nekonečně vzdálený bod o_∞ přímky M a jeden z daných čtyř bodů, n. p. o', zvolme za vrcholy vytvořujících svazků $ABC..$ π $A'B'C'..$; zde napsané paprsky jsou opět ony, jimiž se body a, b, c resp. z bodů o_∞, o' promítají. Sestrojíme opět další bod x a jeho tečnu dle návodu předešlého článku; mimochodem podává δ tečny ve vrcholech, t. j. jednu asymptotu $\overline{\delta o_\infty}$ a tečnu $\overline{\delta o'}$ v bodě o'. — Vrcholem o_∞ procházející paprsek Z_∞ do nekonečna zapadající, protne hy-

Obr. 59.

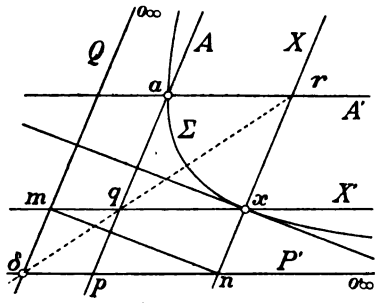


perbolu ještě v jednom bodě z_∞, jejž obdržíme, sestrojivše paprsek Z' projektivně k Z_∞ příslušný, jakožto průsečík $(Z_\infty Z')$. Tečna T v bodě z_∞ jest pak druhá asymptota; v obrazci jest sestrojena na základě věty o vepsaném trojúhelníku $o_\infty o' z_\infty$, vytčené v předešlém článku.

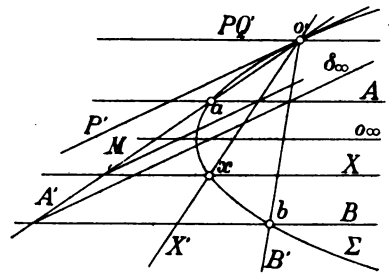
Nechť se sestrojí hyperbola, daná jednou asymptotou Q a třemi body o', a, b. Volíme-li nekonečně vzdálený bod o_∞ asymptoty Q za vrchol a na př. bod o' za vrchol druhého svazku kuželosečku vytvořujícího, přísluší paprskům A, B, Q svazku o pro-

jektivně paprsky A', B' Q' svazku o', při čemž Q' jest paprsek oběma svazkům společný. Další body a druhá asymptota se strojí jako v předešlé úloze.

Obr. 60.



Obr. 61.



Nechť se sestrojí hyperbola, daná oběma asymptotami a jedním bodem. Dané asymptoty quďte Q, P', a daný bod a (obr. 60.). Volíme-li nekonečně vzdálené body o_∞, o'_∞ asymptot za vrcholy vytvořujících svazků, máme projektivnost $APQ \ldots \pi A P'Q' \ldots$, kdež $P \equiv Q'$ jest paprsek v nekonečnu, oběma svazkům společný. — Direkční střed δ jest průsečík (QP') obou asymptot. Sdružené paprsky plynou tím, že spojnice $(\overline{AX'})$ $(\overline{A'X})$ musí procházeti bodem δ. Tečnu T v bodě x obdržíme opět na základě věty o vepsaném trojúhelníku $o_\infty o'_\infty x$: věta ta ukazuje, že tečna T jest rovnoběžna s úhlopříčnou mn rovnoběžníku $xm\delta n$, jehož dvě strany zapadají do asymptot a jehož jedním vrcholem jest x; rozpoluje tedy dotyčný bod tuto tečnu, omezenou asymptotami.

Volíme-li δ za počátek a asymptoty P', Q za osy soustavy rovnoběžných souřadnic, jsou $\overline{\delta n}$, $\overline{\delta m}$ souřadnice bodu x hyperboly; z podobných trojúhelníků $\triangle \delta pq \sim \triangle \delta nr$ plyne úměra $\overline{\delta p} : \overline{pq} = \overline{\delta n} : \overline{nr}$, čili

$$\overline{\delta p} : \overline{\delta m} = \overline{\delta n} : \overline{pa}, \text{ a tedy } \overline{\delta m} \cdot \overline{\delta n} = \overline{\delta p} \cdot \overline{pa} = \text{stálé},$$

t. j. součinu souřadnic bodu hyperboly jest stálý. — Tečna T bodu x tvoří na asymptotách patrně úseky, jež jsou dvakrát tak velké jako $\overline{\delta n}$ a $\overline{\delta m}$, a tedy jest i součin těchto úseků stálý.

Nechť se sestrojí parabola, daná směrem osy a třemi body. Parabola jest kuželosečka, dotýkající se přímky v nekonečnu; o přímkách, vedených dotyčným bodem o_∞ přímky nekonečně vzdálené pravíme, že mají směr osy paraboly. Každá z nich protíná parabolu mimo v bodu o_∞ ještě v jednom bodě a tečna

v tomto bodě sestrojená jest pro jedinou, určitou polohu oné přímky k ní kolma; příslušný bod paraboly sluje *vrcholem v a přímka* vo_∞ *osou paraboly*. Uvážíme-li totiž, že libovolným bodem v nekonečnu k_∞ prochází mimo přímku v nekonečnu ještě jedna tečna paraboly, stačí vytknouti bod k_∞ tak, aby byl ve směru kolmém k onomu, v němž se nalézá bod o_∞; tečna V paraboly, bodem k_∞ vedená, jest pak vrcholová tečna a její dotyčný bod v jest vrcholem paraboly. Název *osy* pro přímku vo_∞ později odůvodníme.

Dán-li směr osy přímkou M, a tři body paraboly o', a, b, (obr. 61.), známe vlastně čtyři body a tečnu v jednom z nich, totiž body o', a, b a bod o_∞ na přímce M v nekonečnu, jehož tečna jest přímka v nekonečnu Q_∞. Zvolivše o_∞, o' za vrcholy svazků čáru vytvořujících, máme projektivnost $ABQ..\pi A'B'Q'..$, značí-li A, B, A', B' paprsky, jimiž se dané body a, b z vrcholů o_∞, o' promítají a Q paprsek oběma svazkům společný. Direkční střed δ jest na přímkách $(\overline{AB'})\,(\overline{A'B})$ a Q_∞, a tedy v nekonečnu. Sestrojení dalšího bodu x a jeho tečny, pomocí vepsaného trojúhelníku $o_\infty o'x$, se děje jako nahoře.

54. Strojení kuželosečky z pěti tečen: speciálné případy.

Speciálné případy, k nimž v tomto článku přihlédneme, vznikají tím, že dvě z daných tečen jsou nekonečně blízké, aneb že jedna tečna jest přímka v nekonečnu.

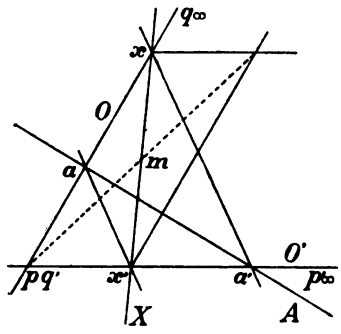
Dána-li tečna O čáry s dotyčným bodem q, nahrazuje to dvě tečny; lze totiž přímku vedenou bodem q a odchylující se málo od přímky Q pokládati za další tečnu s přesností tím větší, čím menší jest ona odchylka. *Jde-li o stanovení kuželosečky, stačí tedy další tři tečny O', A, B* (obr. 55.). Zvolivše tečny O, O' za řady vytvořující kuželosečku, máme projektivnost $abq..\pi a'b'q'..$, značí-li q' bod oběma řadám společný a a, b, a', b' body tečnami A, B vytčené. Direkční osa prochází bodem q a bodem $(\overline{ab'}\,\overline{ab'})$; její pomocí sestrojíme další sdružené body x, x' a další tečnu $X \equiv \overline{xx'}$, jejíž dotyčný bod plyne pomocí věty o opsaném trojstranu $O\,O'\,X$ v čl. 52. odvozené.

Dány-li dvě tečny O, O' kuželosečky s body dotyčnými q, p' a další tečna A, což platí za $2.2+1$ t. j. pět tečen, volme O, O' opět za řady vytvořující kuželosečku (obr. 55.), a máme projektivnost $apq..\pi a'p'q'..$, značí-li $p \equiv q'$ bod řadám společný

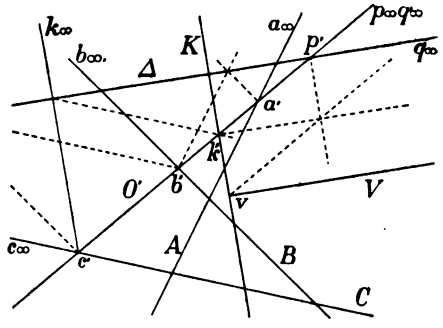
Direkční osa Δ jest spojnice dotyčných bodů $\overline{qp'}$ a podává další sdružené body x, x', atd.

Dána-li speciálně hyperbola jednou asymptotou a třemi tečnami, aneb dvěma asymptotami a jednou tečnou, sestrojíme další tečny a jich body dotyčné způsobem právě vytknutým. Druhý z těchto případů vyznačen v obr. 62., kde O, O' jsou dané asymptoty, A daná tečna; body dotyčné q_∞, p'_∞ jsou v nekonečnu, a tudíž také direkční osa Δ_∞. Bod $(\overline{ax'}\ \overline{a'x})$ na Δ a tedy v nekonečnu ukazuje rovnoběžnost přímek $\overline{ax'}$, $\overline{a'x}$, čímž získána konstrukce tečny X. Opsaný trojstran $OO'X$ podává dotyčný bod m tečny X: on jest na úhlopříčné rovnoběžníku, jehož dvě strany jsou $\overline{px}$, $\overline{px'}$, a tedy rozpoluje délku $\overline{xx'}$, jakož jsme již v předešlém článku byli nalezli.

Obr. 62.



Obr. 63.



Čtyř přímek se dotýká vždy parabola, neboť jest to vlastně výrok, že pěti přímek, z nichž jedna jest v nekonečnu, se dotýká jedna kuželosečka; ovšem předpokládáme, že žádné tři z těchto pěti přímek neprocházejí jedním bodem, t. j. že žádné tři z daných čtyř přímek neprocházejí jedním bodem, aniž jsou dvě z nich rovnoběžné. *Parabolu, danou čtyřmi tečnami O', A, B, C lze konstruovati dle čl. 52.* tím, že zvolíme na př. tečnu v nekonečnu O_∞ a tečnu O' za řady parabolu vytvořující; stanoví-li tečny A, B, C na O_∞ resp. O' (obr. 63.) body a_∞, b_∞, c_∞ resp. a', b', c', máme projektivnost $a_\infty b_\infty c_\infty \dots \pi\, a'b'c' \dots$

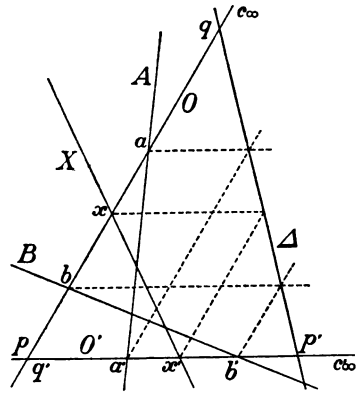
Direkční osa Δ, procházejíc dotyčným bodem tečny O_∞, udává směr osy paraboly, a protíná tečnu O' v dotyčném bodě p'. Vrcholová tečna, jsouc kolma k Δ, prochází bodem k_∞, jímž procházejí všecky kolmice k Δ vedené; sestrojíme-li tedy bod k v řadě O' projektivně příslušný — třeba na základě výroku,

že $(\overline{c'k_\infty}\ \overline{ck'})$ jest na Δ — jest spojnice $\overline{k_\infty k'}$ vrcholová tečna K. Vrchol v jest její dotyčný bod, jenž sestrojen na základě věty o opsaném trojstranu $O_\infty O'K$; vrcholem v vedená rovnoběžka V k Δ jest osou paraboly. — Libovolná další tečna X plyne sestrojením dvou sdružených bodů x_∞, x' jakožto jejich spojnice; a její dotyčný bod opět pomocí věty o opsaném trojstranu, n. p. $OO'X$.

Nejde-li právě o sestrojení osy paraboly, lze parabolu čtyřmi tečnami danou, též tak strojiti, že dvě z daných čtyř tečen zvolíme za řady vytvořující. Označme nyní dané tečny O, O', A, B; tečna pátá je přímkou v nekonečnu C_∞. Tato tečna stanoví na řadách O, O' dva sdružené body c_∞, c'_∞ *a jsou tedy řady na* O, O', *parabolu vytvořující, projektivně podobné; a naopak, dvě podobné, neperspektivné řady v téže rovině vytvořují parabolu,* jelikož spojnice sdružených bodů nekonečně vzdálených, t. j. přímka v nekonečnu, jest tečnou vytvořené kuželosečky.

V obrazci 64. sestrojena direkční osa Δ jakožto přímka obsahující body $(\overline{ac'_\infty}\ \overline{a'c_\infty})$, $(\overline{bc'_\infty}, \overline{b'c_\infty})$; na ní jest obecně bod $(\overline{xc'_\infty}\ \overline{x'c_\infty})$, z čehož patrno, že tečny paraboly $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$, $\overline{xx'}$, .. se jeví jakožto úhlopříčky rovnoběžníků, jichž dvě strany zapadají do tečen O, O' a jichž vrchol se pohybuje po spojnici Δ dotyčných bodů těchto dvou pevných tečen. Dotyčný bod tečny $X \equiv \overline{xx'}$ lze sestrojiti pomocí opsaného trojstranu $OO'X$.

Obr. 64



Parabola, daná tečnou O *s dotyčným bodem* q, *a dvěma dalšími tečnami* O, A se zcela obdobně strojí pomocí projektivných řad O, O'. Značí-li q' společný bod řad, do druhé řady počítaný, a, a' body stanovené tečnou A, a c_∞, c'_∞ body stanovené tečnou C_∞, vytvoří řady $a\ c_\infty\ q\ ..\ \pi\ a'\ c'_\infty\ q'\ ..$ patrně žádanou parabolu. Ostatně lze za druhou řadu zvoliti tečnu v nekonečnu; pak jest lépe označiti dané tečny O, A, B a řadu v nekonečnu O'_∞. Parabolu vytvoří řady $a\ b\ q\ ..\ \pi\ a'_\infty\ b'_\infty\ q'_\infty\ ..$, značí-li a, a'_∞ body vytčené na řadách tečnou A, a b, b_∞ body tečnou B vytčené, konečně q'_∞ bod oběma řadám společný. Osa direkční Δ spojuje bod q s bodem $(\overline{ab'_\infty}\ \overline{a'_\infty b})$; ona udává směr osy paraboly. Další tečny, dotyčné body, zvlášť tečna vrcholová a vrchol plynou tak jako nahoře.

55. Jednodušší problem projektivity.

Geometrické místo bodu o, z něhož se dané čtyři body a, b, c, d v rovině promítají čtyřmi paprsky A, B, C, D o daném dvojpoměru, jest kuželosečka procházející body a, b, c, d.

Jsou-li o, o' dva body hovící vytknutému požadavku, jsou čtyřpaprskové svazky $o(a, b, c, d)$, $o'(a, b, c, d)$ projektivné a tedy body o, o', a, b, c, d na kuželosečce, jež jest již body o, a, b, c, d stanovena. Označíme-li tečnu této čáry v bodě a literou T, musí paprsky $T \equiv \overline{aa}, \overline{ab}, \overline{ac}, \overline{a\,l}$ míti daný dvojpoměr, čímž snadno plyne T a pak i kuželosečka sama.

Geometrické místo přímky O, jež protíná čtyři dané přímky v rovině A, B, C, D ve čtyrech bodech a, b, c, d o daném dvojpoměru, jest kuželosečka dotýkající se přímek A, B, C, D.

Jsou-li O, O' dvě přímky hovící vytknutému požadavku, jsou čtyřbodové řady $O(A, B, C, D)$, $O'(A, B, C, D)$ projektivné, a tedy se dotýkají přímky O, O', A, B, C, D kuželosečky, stanovené již pěti tečnami O, A, B, C, D. Označíme-li dotyčný bod tečny A literou t, musí body $t \equiv (AA)$, (AB), (AC), (AD) míti daný dvojpoměr, čímž snadno plyne t a pak i kuželosečka sama.

Chasles nazval problemem projektivity tento úkol:

Dáno v rovině sedm bodů $a_1, a_2, \ldots a_7$ *a sedm jiných bodů* $b_1, b_2, \ldots b_7$; *stanoviti body o, o' tak, aby paprsky, jimiž se body* a_ν *promítají z bodu o, tvořily projektivný svazek se svazkem sedmi paprsků, jež promítají body* b_ν *z bodu o'.*

Zde vytkneme řešení jednodušších úkolů:

Stanoviti bod o, z něhož se pět daných bodů a, b, c, d, e promítá pěti paprsky projektivnými s pěti danými paprsky A', B', C', D', E' svazku o'.

Sestrojme kuželosečku Σ, z jejíž bodů se body a, b, c, d promítají čtyřmi paprsky o dvojpoměru $(A'B'C'D')$, a kuželosečku Σ', z jejíchž bodů se promítají body a, b, c, e čtyřmi paprsky o dvojpoměru $(A'B'C'E')$; kuželosečky Σ a Σ' se mimo

Stanoviti přímku O, jež protíná pět daných přímek A, B, C, D, E v pěti bodech projektivných s pěti danými body a', b', c', d', e' řady O'.

Sestrojme kuželosečku Σ, jejíž tečny protínají přímky A, B, C, D ve čtyřech bodech o dvojpoměru $(a'b'c'd')$, a kuželosečku Σ', jejíž tečny protínají A, B, C, E v bodech o dvojpoměru $(a'b'c'e')$; kuželosečky Σ a Σ' mají mimo A, B, C ještě

body a, b, c protnou ještě ve čtvrtém bodu o, jenž vyhovuje úkolu; jeho sestrojení podáno v článku 83.

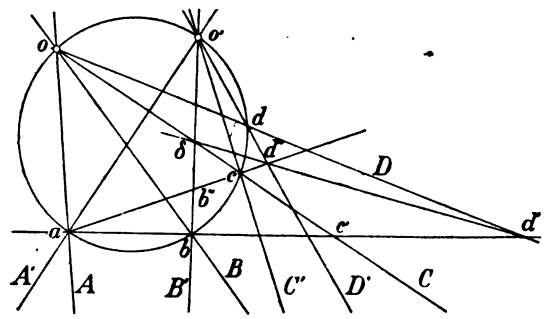
jednu společnou tečnu O, hovící úkolu; její konstrukce podána v článku 83.

56. Věta Pascalova (hexagrammum mysticum).

Pěti body prochází určitá kuželosečka; má-li se nalézati šest bodů na kuželosečce, musí býti mezi nimi jistý vztah, a ten vyjádřen větou Pascalovou.

Šest bodů o, o', a, b, c, d se nalézá tenkráte a jen tenkráte na kuželosečce, promítají-li se body a, b, c, d z bodů o, o' dvěma projektivnými svazky. Značíme-li literami A, B, C, D resp. A', B', C', D' paprsky promítající, jest tedy nutné a stačí, aby spojnice $(AB')(A'B)$, $(AC')(A'C)$, $(AD')(A'D)$ procházely jedním bodem. Toť onen vztah, a jej vyjadřuje věta Pascalova ve tvaru jednodušším.

Obr. 65.



Protneme-li (obr. 65.) projektivné čtyřpaprskové svazky $ABCD \pi A'B'C'D'$ přímkami $\overline{ab}$ resp. $\overline{ac}$ v bodech a, b, c', d' resp. a, b'', c, d'', obdržíme dvě projektivné čtyřbodové řady $abc'd' \pi ab''cd''$, jichž společný bod a sobě přísluší; jsou tedy řady ty perspektivné, t. j. spojnice $\overline{bb''}$, $\overline{c'c}$, $\overline{d'd''}$ procházejí jedním bodem δ. To ale také stačí, aby řady byly perspektivné, tudíž svazky projektivné a body o, o', a, b, c, d na kuželosečce. Přímka $\overline{bb''}$ jest totožna s přímkou $\overline{bo}$, a přímka $\overline{c'c}$ s přímkou $\overline{co}$; procházejí tedy přímky $\overline{bo'}$, $\overline{co}$, $\overline{d'd''}$ jedním bodem δ, aneb, což jest totéž, body d', d'', δ jsou na přímce.

Avšak $d' \equiv (\overline{ab}\ \overline{do})$, $\delta \equiv (\overline{bo'}\ \overline{oc})$, $d'' \equiv (\overline{o'd}\ \overline{ca})$ jsou prů-

sečíky protějších stran jednoduchého šestiúhelníku *abo'doc* vepsaného do kuželosečky, čímž nalezena *věta Pascalova*:*)

Je-li šestiúhelník do kuželosečky vepsán, protínají se protější strany ve třech bodech na přímce položených, a naopak.

Přímka $\overline{d'd''\delta}$ se nazývá přímkou Pascalovou, příslušnou šestiúhelníku *abo'doc.*

Označíme-li šest bodů kuželosečky ciframi 1, 2, 3, 4, 5, 6, značíme symbolem 123456 šestiúhelník, jehož po sobě jdoucí strany jsou $\overline{12}$, $\overline{23}$, $\overline{34}$, $\overline{45}$, $\overline{56}$, $\overline{61}$; věta Pascalova praví, že se body $(\overline{12}\ \overline{45})$, $(\overline{23}\ \overline{56})$, $(\overline{34}\ \overline{61})$ nalézají na přímce. Šestiúhelník o týchž vrcholech 235146 vede k výroku, že se body $(\overline{23}\ \overline{14})$, $(\overline{35}\ \overline{46})$, $(\overline{51}\ \overline{62})$ nalézají na přímce, atd. S danými šesti vrcholy lze celkem sestrojiti 60 jednoduchých šestiúhelníků, neboť všech permutací z šesti cifer jest $1.2.3.4.5.6$ a vždy dvanáct permutací dává týž šestiúhelník, jako na př.

123456; 234561; 345612; 456123; 561234; 612345;
654321; 543216; 432165; 321654; 216543; 165432,

tak že obdržíme $\frac{1.2.3.4.5.6}{12} = 60$ různých šestiúhelníků. Každému náleží jistá přímka Pascalova, a veškery tyto přímky vykazují zajímavé vztahy, *Steinerem* a j. odvozené, k nimž zde pouze poukazujeme.**)

Pascalovu větu lze vysloviti v jiném, též zajímavém tvaru. V šestiúhelníku 123456 jsou první, třetí a pátá strana $\overline{12}$, $\overline{34}$, $\overline{56}$, druhá, čtvrtá a šestá $\overline{23}$, $\overline{45}$, $\overline{61}$; první tři tvoří trojúhelník, druhé tři též. Přiřadíme-li stranám $\overline{12}$, $\overline{34}$, $\overline{56}$ prvního resp. strany $\overline{45}$, $\overline{61}$, $\overline{23}$ druhého, jsou průsečíky sdružených stran tehdy a jen tehdy na přímce, je-li šestiúhelník kuželosečce vepsán; trojúhelníky, jichž podvojné strany se protínají na přímce, jsou perspektivné čili homologické (čl. 20.), čímž:***)

Jsou-li dva trojúhelníky homologické, protínají strany jednoho nepříslušné strany druhého v šesti bodech kuželosečky, aneb jinak řečeno, *jestliže z devíti bodů, v nichž strany jednoho trojúhelníku protínají strany jiného trojúhelníku, tři se nalézají na přímce, nalézá se ostatních šest na kuželosečce.*

---

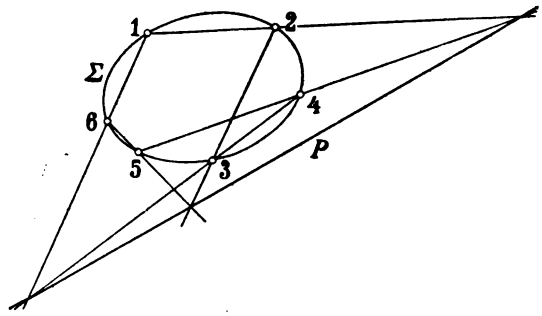
*) *Pascal*, Essai sur les coniques, 1640.

**) *Steiner*, Systemat. Entwickelung etc., § 60, art. 54., *Hesse*, Eine Bemerkung zum Pascal'schen Theorem, Crelle t. XLI, Ueber die Reciprocitaet der Pascal-Steiner'schen und der Kirkman-Cayley-Salmon'schen Sätze von dem Hexagrammum mysticum, Crelle t. LXVIII.

***) *Steiner*, Syst. Entw., art. 42.

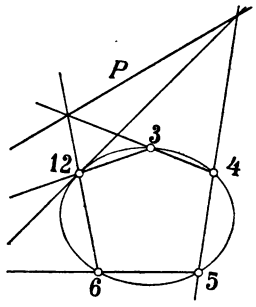
Věta Pascalova podává konstrukci bodů kuželosečky, dané pěti body 1, 2, 3, 4, 5 (obr. 66.). Bodem 1 veďme libovolnou přímku A a označme 6 další její průsečík s kuželosečkou, tak že $A \equiv \overline{61}$. Spojnice bodů $(\overline{12}\ \overline{45})$, $(\overline{34}\ \overline{61})$ jest Pascalova

Obr. 66.

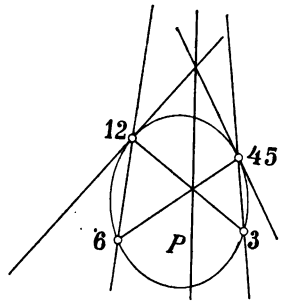


přímka P šestiúhelníku 123456, a na ní se $\overline{23}$ protiná s $\overline{56}$, čímž nalézáme $\overline{56}$; tato protne A v bodě 6. — Bod $(\overline{12}\ \overline{45})$ přímky Pascalovy jest nezávislý na přímce A; lze tedy další body kuželosečky také tak strojiti, že bodem $(\overline{12}\ \overline{45})$ vedeme libovolnou přímku Pascalovu P; ta protne pevné přímky $\overline{34}$ a $\overline{23}$ ve dvou bodech, jež promítnuty z 1 resp. 5 podávají dva paprsky, protínající se v bodě 6 kuželosečky.

Obr. 67.



Obr. 68.



Jsou-li dva z šesti bodů kuželosečky nekonečně blízké, na př. $1 \equiv 2$, jest jich spojnice $\overline{12}$ tečnou v bodě 1, a Pascalova věta pak zní: *Je-li pětiúhelník kuželosečce vepsán, jest průsečík tečny v jednom vrcholu s protější stranou, s průsečíky podvojných zbývajících stran na přímce* (obr. 67.).

Věta ta podává ihned tečnu v bodě kuželosečky, dané pěti body 23456; stačí bod 1 pokládati na čáře za nekonečně blízký ku 2, a sestrojiti Pascalův šestiúhelník 123456, jakož obrazec ukazuje.

Má-li kuželosečce vepsaný šestiúhelník 123456 dvě nekonečně krátké strany, t. j. je-li na př. $1 \equiv 2$, $4 \equiv 5$, praví věta Pascalova (obr. 68.), že *průsečík tečen ve dvou vrcholech 1 a 4 vepsaného čtyrrohu 1436 jest na přímce s diagonálnými rohy tohoto čtyrrohu, neležícími na straně* $\overline{14}$.

Na téže přímce jest ovšem také průsečík tečen v bodech 3 a 6 sestrojených, čímž nalézáme čtyři body na přímce a tedy na novo větu v čl. 52. odvozenou: *Je-li úplný čtyrroh kuželosečce vepsán, tvoří tečny, v jeho rozích sestrojené, úplný čtyrstran o témž diagonálném trojúhelníku.*

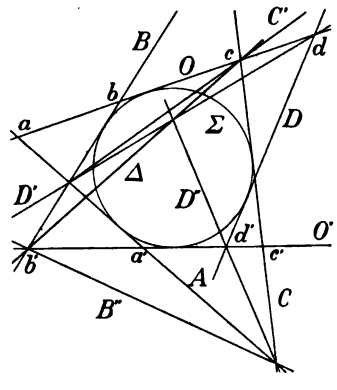
Má-li kuželosečce vepsaný šestiúhelník 123456 tři nekonečně krátké strany, t. j. je-li na př. $1 \equiv 2$, $3 \equiv 4$, $5 \equiv 6$, podává věta Pascalova tento výsledek: *Je-li trojúhelník kuželosečce vepsán, jsou průsečíky stran s tečnami protějších vrcholů na přímce*, čímž na novo stvrzena věta odvozená v čl. 52.

Dána-li kuželosečka pěti body, z nichž dva, neb dvakrát dva jsou nekonečně blízké, t. j. dána-li body a jich tečnami, lze ji tak jako nahoře strojiti, jen je nutno míti na mysli šestiúhelník, jehož jedna resp. dvě strany jsou ony tečny. Tedy na př., jde-li o kuželosečku danou čtyřmi body a tečnou v jednom, označíme tento bod $1 \equiv 2$ a tedy jeho tečnu $\overline{12}$, další body 3, 4, 5 a konstruujeme jako nahoře.

57. Věta Brianchonova.

Značme literami O, O' A, B, C, D šest libovolných tečen kuželosečky, již vytvoříme řadami O, O'; tečny A, B, C, D stanoví na O a O' body a, b, c, d resp. a', b', c', d' projektivné $abcd \pi a'b'c'd'$ (obr. 69.). Promítneme-li tyto řady z bodu (AB) resp. (AC), obdržíme paprsky $ABC'D' \pi AB''CD''$; poněvadž společný paprsek A sobě přísluší, jsou tyto čtyřpaprskové svazky v poloze perspektivné, t. j. průsečíky (BB''), $(C'C)$, $(D'D'')$ jsou na jedné přímce Δ.

Obr. 69.

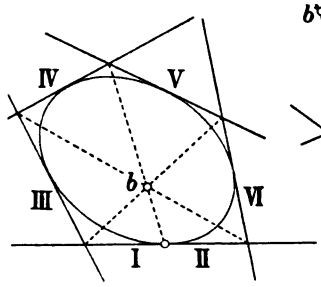


Bod (BB'') jest totožný s bodem (BO') a bod $(C'C)$ s bodem (CO); nalézají se tedy body (BO'), (CO), $(D'D'')$ na přímce Δ, aneb, jinak řečeno, přímky D', D'', Δ procházejí bodem.

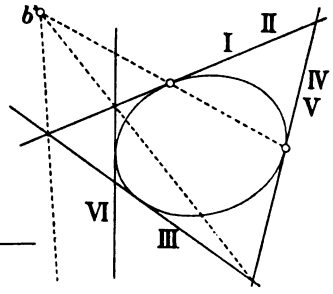
Avšak $D' \equiv \overline{(AB)\ (DO)}$, $\Delta \equiv \overline{(BO')\ (OC)}$, $D'' \equiv \overline{(O'D)\ (CA)}$ jsou spojnice protějších rohů šestiúhelníka $ABO'DOC$ opsaného kuželosečce. Tím nalezena věta *Brianchonova*: *)

Jest-li šestiúhelník kuželosečce opsán, procházejí spojnice protějších rohů jedním bodem, a naopak.

Obr. 70.



Obr. 71.



Tento bod $(D'D''\Delta)$ se nazývá bodem Brianchonovým, příslušným šestiúhelníku $ABO'DOC'$. Označíme-li šest libovolných tečen kuželosečky ciframi I, II, III, IV, V, VI, praví věta Brianchonova, že spojnice $\overline{(I\ II)\ (IV\ V)}$, $\overline{(II\ III)\ (V\ VI)}$, $\overline{(III\ IV)\ (VI\ I)}$ procházejí jedním bodem. Z daných šesti tečen lze sestaviti 60 jednoduchých šestiúhelníků, jimž náleží tolikéž bodů Brianchonových, o jichž vzájemné poloze platí věty reciproké k oněm, k nimž v čl. předchozím poukázáno. Obdobně plyne věta:

Jsou-li dva trojúhelníky homologické, dotýkají se spojnice vrcholů jednoho s nepříslušnými vrcholy druhého kuželosečky, aneb jinak řečeno: *jestliže z devíti spojnic vrcholů jednoho trojúhelníku s vrcholy druhého procházejí tři jedním bodem, dotýká se ostatních šest kuželosečky.* **)

Tečny kuželosečky, dané pěti tečnami I, II, III, IV, V, můžeme pomocí věty Brianchonovy tak strojiti, že zvolíme na př. na I libovolný bod a a označíme VI druhou tečnu, tímto bodem procházející, tak že $a \equiv (VI\ I)$. Brianchonův bod b jest průsečík přímek $\overline{(I\ II)\ (IV\ V)}$, $\overline{(III\ IV)\ (VI\ I)}$, a jím prochází přímka

*) Poprvé uveřejněna r. 1806, později na novo v pojednání *Mémoire sur les lignes du second ordre*, Paris 1817.

**) *Steiner*, l. c.

(II III) (V VI); protne tedy spojnice bodu *b* s (II III) přímku V v bodě, jímž hledaná tečna prochází. Jsou-li dvě z daných pěti tečen nekonečně blízké, na př. I ≡ II, jest jich průsečík (I II) bodem dotyčným a věta Brianchonova pak zní: *Je-li pětiúhelník kuželosečce opsán, prochází spojnice dotyčného bodu jedné strany s protějším rohem, a spojnice podvojných zbývajících rohů jedním bodem* (obr. 70.). Věta ta podává konstrukci dotyčného bodu tečny kuželosečky, dané pěti tečnami II, III, IV, V, VI; stačí tečnu I pokládati za nekonečně blízkou ku II, a sestrojiti Brianchonův šestiúhelník I II III IV V VI, jakož obrazec ukazuje.

Má-li kuželosečce opsaný šestiúhelník I II III IV V VI dva nekonečně malé úhly t. j. je-li na př. I ≡ II, IV ≡ V, praví věta Brianchonova (obr. 71.), *že spojnice dotyčných bodů dvou stran I a IV opsaného čtyrstranu prochází jedním bodem s diagonálnými stranami tohoto čtyrstranu, neprocházejícími rohem (I IV).* Týmž bodem prochází arci také spojnice dotyčných bodů tečen III a VI, čímž na novo nalézáme větu v čl. 52. odvozenou: *Je-li čtyrstran kuželosečce opsán, tvoří dotyčné body jeho stran úplný čtyrroh o témž diagonálném trojúhelníku.*

Má-li šestiúhelník I II III IV V VI opsaný kuželosečce třikráte dvé nekonečně blízkých stran I ≡ II, III ≡ IV, V ≡ VI, podává věta Brianchonova tento výsledek: *Je-li trojúhelník kuželosečce opsán, procházejí spojnice vrcholů s dotyčnými body protějších stran jedním bodem* (čl. 52.).

Kterak se strojí větou Brianchonovou tečny kuželosečky dané čtyřmi tečnami a jedním dotyčným bodem, aneb třemi tečnami a dvěma dotyčnými body, jest již patrné; nutno jen užiti šestiúhelníku opsaného, v němž dané dotyčné body jsou rohy; tedy dána-li na př. tečna s dotyčným bodem a další tři tečny, označíme onu I ≡ II a tyto III, IV, V, při čemž (I II) jest daný dotyčný bod, a strojíme šestou tečnu VI jako nahoře.

58. Kuželové plochy druhého stupně a druhé třídy.

Jakož jsme již ve čl. 17. a 19. byli ukázali, lze z obrazců v rovině odvoditi obrazce obdobné ve svazku prostorovém promítáním z pevného bodu, mimo rovinu položeného.

Promítneme-li čáru, jež se jeví jakožto geometrické místo bodu, obdržíme plochu kuželovou jakožto geometrické místo paprsku; a promítnutím čáry tečnové obdržíme plochu kuželovou vytknutou tečnými rovinami, totiž průměty tečen dané čáry.

Tímto způsobem odvodíme z předchozích úvah ihned následující výsledky a definice, podvojně reciproké ve svazku prostorovém.

Dva projektivné svazky rovin $\alpha\beta\gamma\ldots\ \pi\ \alpha'\beta'\gamma'\ldots$ v témž svazku prostorovém vytvoří kužel druhého stupně, t. j. kužel, jehož řez s rovinou jest čára druhého stupně; jsou totiž průsečné přímky $\overline{\alpha\alpha'}$, $\overline{\beta\beta'}$, $\overline{\gamma\gamma'}$,.. hrany vytvořeného kužele. — Nejsou-li dané svazky rovin perspektivné, vytvoří vlastní kužel druhého stupně, jehož rovinný řez jest totiž kuželosečka nezvrhlá; jsou-li perspektivné, vytvoří zvrhlý kužel druhého stupně, skládající se ze dvou rovin: z roviny, na níž se protínají sdružené elementy svazků, a z roviny vedené oběma osami svazků.

Nezvrhlý kužel druhého stupně jest současně kuželem druhé třídy.

Hrany kužele druhého stupně se promítají ze dvou hran téhož kužele dvěma projektivnými svazky rovin.

Je-li šestihran vepsán kuželi druhého stupně, protínají se protější stěny ve třech přímkách téže roviny.

Souhrn hran kužele druhého stupně tvoří útvar druhého řádu, jejž lze nazvati soustavou hran druhého řádu, a jehož elementy jsou tyto hrany. Takovou soustavu hran zoveme projektivnou s nějakým útvarem, je-li s ním projektivný

Dva projektivné svazky paprskové $ABC\ldots\ \pi\ A'B'C'\ldots$, v témž svazku prostorovém vytvoří kužel druhé třídy, t. j. kužel, jehož řez s rovinou jest čára druhé třídy; jsou totiž roviny sdruženými elementy vedené (AA'), (BB'), (CC') tečnými rovinami kužele. — Nejsou-li dané svazky perspektivné, vytvoří vlastní kužel druhé třídy, jehož rovinný řez jest totiž kuželosečka nezvrhlá; jsou-li perspektivné, vytvoří zvrhlý kužel druhé třídy, skládající se z dvou paprsků (svazků rovin): z osy, jíž procházejí roviny vedené sdruženými elementy, a z průsečné přímky rovin daných svazků.

Nezvrhlý kužel druhé třídy jest současně kuželem druhého stupně.

Tečné roviny kužele druhé třídy protínají dvě tečné roviny téhož kužele ve dvou projektivných svazcích paprskových.

Je-li šestistěn opsán kuželi druhé třídy, procházejí roviny vedené protějšími hranami jednou přímkou.

Souhrn tečných rovin kužele druhé třídy tvoří útvar druhého řádu, jejž lze nazvati svazkem rovin druhého řádu, a jehož elementy jsou tyto tečné roviny. Takový svazek rovin druhého řádu zoveme projektivným s nějakým útva-

svazek rovin, jímž se soustava z libovolné hrany kužele promítá.

Speciálně jest soustava hran druhého řádu projektivná s řadou druhého řádu, v níž ji protíná libovolná rovina, neprocházející vrcholem kužele; vztah ten lze zváti i perspektivným, poněvadž hrany procházejí svými příslušnými body.

rem, je-li s ním projektivný svazek paprskový, v němž soustavu protíná libovolná tečná rovina kužele.

Speciálně jest svazek rovin druhého řádu projektivný se svazkem druhého řádu, v němž jej protíná libovolná rovina, neprocházející vrcholem kužele; vztah ten lze zváti i perspektivným, poněvadž tečné roviny procházejí svými příslušnými paprsky.

Soustava hran kužele druhého stupně a třídy jest projektivná se soustavou tečných rovin kužele, sestrojených podél oněch hran.

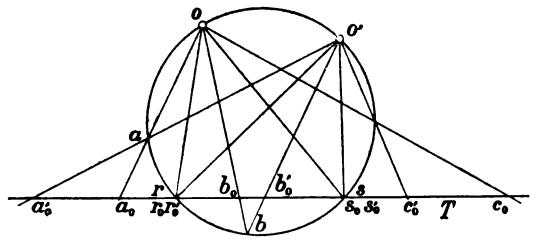
Kapitola VII.

Průsečíky přímky s kuželosečkou, tečny bodem vedené. Projektivné řady a svazky druhého řádu, zvláště involutorné. Pól a polára.

59. Průsečíky přímky s kuželosečkou.

Promítáme-li (obr. 72.) body kuželosečky $abc\ldots$ ze dvou bodů o, o' této čáry na libovolnou přímku T, obdržíme dvě

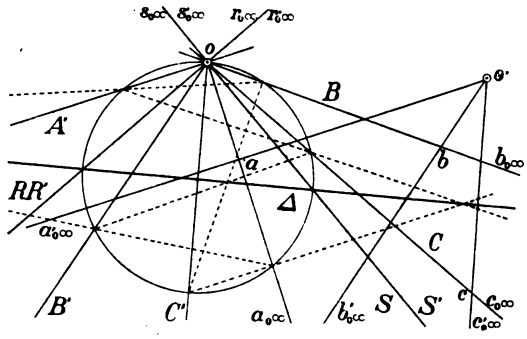
Obr. 72.



soumístné projektivné řady $a_0b_0c_0\ldots \pi\ a'_0b'_0c'_0\ldots$; jsou totiž svazky o, o' projektivné, a ony řady jich řezy s přímkou T. Protíná-li T kuželosečku v bodech r, s, vznikají splývající body $r_0 \equiv r'_0$, $s_0 \equiv s'_0$, t. j. samodružné body těchto řad, a naopak;

neprotne-li T kuželosečku v realných bodech, mají řady imaginárné samodružné body, jež pokládáme ale i v tomto případu za body společné přímce T a kuželosečce; dotýká-li se přímka T kuželosečky, jest bod dotyčný jediný samodružný bod oněch řad, čili řady v něm mají dva splývající samodružné body. Tím řešen úkol, *stanoviti průsečíky přímky T s kuželosečkou, danou pěti body* o, o', a, b, c; stačí promítnouti a, b, c z bodu o na T do bodů a_0, b_0, c_0 a z bodu o' do bodů a'_0, b'_0, c'_0, .. a stanoviti (čl. 41.) samodružné body $r_0 \equiv r'_0$, $s_0 \equiv s'_0$ projektivných řad $a_0 b_0 c_0 \ldots \pi\ a_0 b'_0 c'_0 \ldots$

Obr. 73.



Je-li přímka T v nekonečnu (obr. 73.), *rozhodnuto touto konstrukcí, jakého jest druhu kuželosečka, daná pěti body.* Soumístné řady v nekonečnu promítneme z libovolného bodu, na př. o, soumístnými svazky $ABC \ldots \pi\ A'B'C' \ldots$, jichž samodružné paprsky $R \equiv R'$, $S \equiv S'$ vytknou na T_∞ průsečíky r_∞, s_∞ kuželosečky s T_∞. Jsou-li R, S reálné, různé neb splývající, resp. imaginárné, jest čára hyperbolou nebo parabolou, resp. ellipsou; zároveň udávají R, S směry asymptot neb směr osy paraboly.

Je-li daná kuželosečka hyperbolou a daná přímka T asymptotou její, mají řady $a_0 b_0 c_0 \ldots \pi\ a'_0 b'_0 c'_0 \ldots$ dva splývající body samodružné v nekonečnu, a platí tedy (čl. 27.) věta:

Otáčejí-li se kolem dvou pevných bodů hyperboly o, o' dva paprsky procházejíce stále bodem hyperboly, stanoví na asymptotě dva body o stálé vzdálenosti.

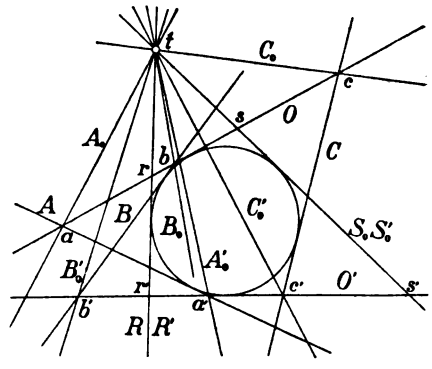
Úkol, stanoviti průsečíky dané přímky s kuželosečkou, vytknutou pěti tečnami, převedeme na úkol právě řešený, sestrojíme-li nejprve — třeba větou Brianchonovou — dotyčné body daných pěti tečen.

Speciálné případy, vznikající tím, že mezi danými body se vyskytují nekonečné blízké, aneb body v nekonečnu, řeší se právě tak, jako případ obecný.

60. Tečny kuželosečky daným bodem.

Vytvoříme-li kuželosečku, danou pěti tečnami O, O', A, B, C, dvěma projektivnými řadami $abc\ldots \pi\ a'b'c'\ldots$, jež na O, O' stanoví tečny A, B, C, a promítneme-li tyto řady z libovolného bodu t dvěma ovšem projektivnými svazky $A_0B_0C_0\ldots \pi\ A'_0B'_0C'_0\ldots$ (obr. 74.), vzniká jich samodružný paprsek $R_0 \equiv R'_0$ tím, že dva sdružené body r, r' jsou s bodem t v jedné přímce, t. j. že tečna $\overline{rr'}$ kuželosečky prochází daným bodem t.

Obr. 74.



Tím řešen úkol, stanoviti tečny procházející daným bodem t ke kuželosečce, dané pěti tečnami O, O', A, B, C; stačí vytknouti body a, b, c resp. a', b', c', v nichž A, B, C protínají O resp. O', promítnouti tyto body z t paprsky A_0, B_0, C_0 resp. A'_0, B'_0, C'_0 a stanoviti samodružné paprsky soumístných projektivných svazků $A_0B_0C_0\ldots \pi\ A'_0B'_0C'_0\ldots$ Existují-li dva samodružné elementy $R_0 \equiv R'_0$, $S_0 \equiv S'_0$, jsou tyto hledanými tečnami, existuje-li jediný čili dva splývající, jest to jediná tečna bodem t procházející a bod t tudíž (čl 48.) na kuželosečce, nemají-li konečně svazky samodružných paprsků, tu bodem t neprocházejí reálné tečny ke kuželosečce.

Řešený úkol lze tím specialisovati, že se mezi danými tečnami vyskytují podvojné nekonečně blízké, aneb tečna položená v nekonečnu; řešení samo jest vždy totéž.

Úkol, stanoviti tečny procházející daným bodem ke kuželosečce dané pěti body, převedeme na úkol právě řešený tím, že si nejprve sestrojíme tečny kuželosečky v daných pěti bodech, třeba pomocí věty Pascalovy.

61. Body uvnitř a vně kuželosečky, sečny a nesečny.

Bod, jímž procházejí dvě tečny kuželosečky, sluje vnějším, a bod, jímž neprochází žádná reálná tečna, sluje vnitřním bodem

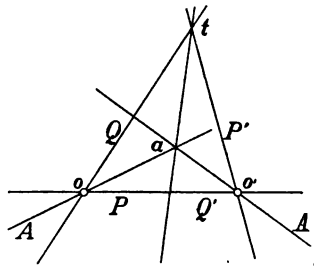
vzhledem ke kuželosečce; bodem na kuželosečce prochází jediná tečna.

Každý bod a na tečně jest vnějším bodem, až na bod dotyčný, jenž jest na čáře; neboť bodem a prochází ještě jedna tečna, jevící se (čl. 60.) jakožto druhý samodružný paprsek dvou projektivných svazků. Souhrn všech bodů veškerých tečen jest tedy totožný se souhrnem všech vnějších bodů.

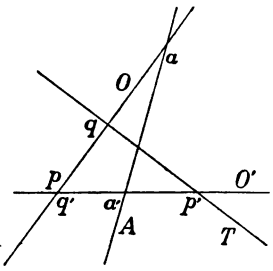
Přímku, jež protíná kuželosečku ve dvou reálných bodech, nazveme sečnou, a přímku neprotínající kuželosečku nesečnou; tečna má s kuželosečkou jediný společný bod.

Vnějším bodem t prochází nekonečně mnoho sečen i nesečen; ony naplňují dva vrcholové úhly, sevřené tečnami, tyto vedlejší dva vrcholové úhly. Sečny jsou totiž spojnice bodu t s body kuželosečky. Vytkněme si tečny $\overline{to}$, $\overline{to'}$ (obr. 75.) s jich dotyčnými body o, o' a vytvořme danou kuželosečku projektivnými svazky o, o'. Budiž $P \equiv Q'$ jich společný paprsek, a tedy tečny P', Q v bodech o', o jemu projektivně příslušné paprsky, dále a libovolný bod kuželosečky, A, A' paprsky svazků jím procházející.

Obr. 75.



Obr. 76.



Otáčí-li se ve svazku o paprsek z polohy P přes Q do A, otáčí se projektivně sdružený z polohy P' přes Q' do A', z čehož patrno, že se protnou každé dva sdružené paprsky v bodě, jenž s bodem a jest v témž úhlu sevřeném tečnami P' a Q, aneb v jeho úhlu vrcholovém; poněvadž platí totéž při dalším otáčení z A přes P do Q, nalézáme, že veškeré body kuželosečky jsou ve dvou vrcholových úhlech (t. j. v jednom neb v obou) mezi rameny P' a Q obsažených. Všecky paprsky vedené bodem t v těchto úhlech jsou tedy sečny, a všecky paprsky vedené ve vedlejších úhlech nesečny kuželosečky; sečny od nesečen oddělují tečny P', Q.

Na sečně T jest nekonečně mnoho vnitřních i vnějších bodů;

body jednoho druhu jsou mezi průsečíky sečny s kuželosečkou, body druhého druhu mimo tyto průsečíky. Vnější body jsou totiž průsečíky přímky T se všemi tečnami. Veďme v průsečných bodech q, p' sečny T s kuželosečkou (obr. 76.) tečny O, O' a vytvořme kuželosečku projektivnými řadami O, O'. Budiž $p \equiv q'$ jich společný bod a tedy dotyčné body q, p' řad O, O' jemu projektivně příslušné body, a buď A libovolná tečna kuželosečky, a, a' její průsečíky s řadami. Dospěje-li bod první řady z polohy p přes q do a, dospěje sdružený bod z polohy p' přes q' do a'. Protíná-li tečna A, jako v obrazci, přímku T mezi body q a p', tu vysvítá, že spojnice každých dvou sdružených poloh pohyblivých bodů protíná T taktéž mezi q a p'; a poněvadž totéž patrně platí při dalším pohybu z a přes p do q, lze to říci o každé tečně. V případě, kdy A protne T mimo délku qp', plyne obdobně, že tak činí každá tečna. Jest tedy v prvním případě každý bod na T mezi q a p' vnitřním a každý bod mimo délku qp' na T položený vnějším; v případě druhém se mají věci naopak, a výrok jest dokázán.

Otáčí-li se sečna T kolem bodu t, jest v poloze nekonečně blízké T' opět sečnou; protne-li totiž T kuželosečku v bodech a, b, a jsou-li A, B její tečny v těchto bodech, protíná T' tyto tečny v bodech kuželosečky. Jen tehdy, kdy T jest tečnou, může T' býti nesečnou, t. j. *sečny a nesečny odděluje tečna.* Probíhá-li bod sečnu, tvoří polohy vnitřní jednu část, polohy vnější druhou část její, a *obě části oddělují body kuželosečky.*

Vnitřním bodem vedená přímka jest vždy sečnou; není totiž možno, aby vnitřním bodem procházely sečny i nesečny, jelikož by jedny od druhých musily oddělovati tečny, a tyto vnitřním bodem neprocházejí.*) — Na nesečně není tedy vnitřních bodů, t. j. *každý bod nesečny jest vnější.*

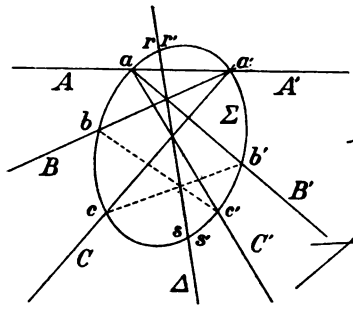
62. Soumístné projektivné řady a svazky druhého řádu.

Projektivný vztah dvou křivých řad na téže kuželosečce Σ (obr. 77.) jest stanoven, dány-li body a', b', c' příslušné třem bodům a, b, c. Dle čl. 49. obdržíme dva projektivné svazky $AB\ldots \pi A'B'C'\ldots$, promítneme-li řady z dvou libovolných bodů o, o' kuželosečky. Položíme-li o' do a, o do a', sjednotí se sdružené paprsky A, A' a svazky jsou perspektivné, t. j. průsečíky

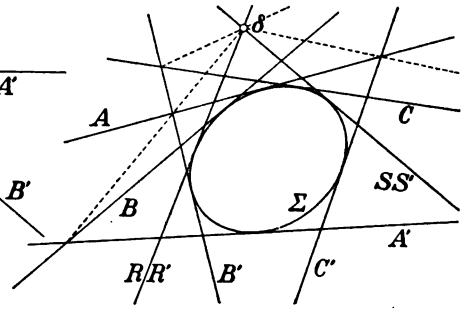
*) Sr. čl. 67.

(BB'), (CC').. jsou na přímce Δ; jinak řečeno, průsečíky $(\overline{ab'}\ \overline{a'b})$, $(\overline{ac'}\ \overline{a'c})$.. jsou na Δ. K libovolnému bodu x řady první obdržíme tedy přidružený x' řady druhé, uvážíme-li, že bod $(\overline{ax'}\ \overline{a'x})$ jest na Δ, t. j. že každé dva sdružené body x, x' vznikají promítáním některého bodu přímky Δ z bodů a' resp. a na kuželosečku.

Obr. 77.



Obr. 78.



Z toho patrno, že body sdružené jen tenkráte splynou, vznikají-li promítnutím bodu přímky Δ, jenž jest současně na Σ, a že *tedy průsečíky r, s přímky* Δ *s kuželosečkou jsou samodružné body* $r \equiv r'$, $s \equiv s'$ *křivých řad*; protne-li Δ kuželosečku ve dvou bodech, mají řady dva samodružné body, dotýká-li se jí, mají dva splývající a konečně neprotíná-li ji, nemají reálných samodružných bodů, nýbrž dva imaginárné samodružné body. Tyto tři možnosti lze také tím ihned poznati, že obě křivé řady promítneme z téhož bodu kuželosečky, dvěma soumístnými projektivnými svazky; samodružné paprsky jejich protnou totiž kuželosečku mimo vrchol ještě v samodružných bodech.

Promítáním křivých řad $abc..\ \pi\ a'b'c'..$ z jiných dvou sdružených bodů, n. p. bodů b' resp. b bychom dospěli k poznání, že body $(\overline{ba'}\ \overline{b'a})$, $(\overline{bc'}\ \overline{b'c})$, $(\overline{bx'}\ \overline{b'x})$,.. jsou na přímce, jež protíná Σ v samodružných bodech; a při reálných samodružných bodech lze ihned souditi, že to přímka Δ. Totožnost této přímky s Δ bude v každém případě patrna, ukážeme-li, že bod $(\overline{bc'}\ \overline{b'c})$ jest na Δ, jelikož bod $(\overline{ba'}\ \overline{b'a})$ již leží na Δ. To ale ukazuje šestiúhelník kuželosečce vepsaný $ab'ca'bc'$; dle věty Pascalovy jsou totiž body $(\overline{ab'}\ \overline{a'b})$, $(\overline{ac'}\ \overline{a'c})$ stanovící Δ s bodem $(\overline{bc'}\ \overline{b'c})$ skutečně na přímce. Tedy:

Jsou-li $abc..\ \pi\ a'b'c'..$ *dvě projektivné řady na kuželosečce,*

nalézají se všecky průsečíky $(\overline{xy'}\ \overline{x'y})$ *na jedné přímce* Δ, *procházející samodružnými body řad*; *přímku* Δ *nazveme direkční osou projektivných řad.*

Reciprokým způsobem vytkneme projektivný vztah dvou křivých svazků na téže kuželosečce Σ (obr. 78.), přiřadíme-li třem paprskům A, B, C svazku prvního tři paprsky A', B', C' svazku druhého. Protneme-li $ABC..$ přímkou A' v řadě $abc..$, a svazek $A'B'C'..$ přímkou A v řadě $a'b'c'..$, budou (čl. 49.) tyto dvě řady projektivné, a poněvadž $a \equiv a'$, budou v poloze perspektivné, t. j. spojnice $\overline{bb'}$, $\overline{cc'}$,.. procházejí jedním bodem δ, čili, jinak řečeno, spojnice $(\overline{AB'})\ (\overline{A'B})$, $(\overline{AC'})\ (\overline{A'C})$,.. procházejí jedním bodem δ. K libovolnému elementu X sdružený X' plyne ihned, uvážíme-li, že spojnice $(\overline{AX'})\ (\overline{A'X})$ prochází bodem δ, čili, že sdružené paprsky X, X' procházejí body, jež na řadách A' resp. A vytkne paprsek vedený bodem δ.

Dva sdružené paprsky tedy splynou jen tehdy, je-li paprsek bodem δ vedený tečnou a s ní pak splývají dva sdružené paprsky. Jsou tedy tečny, bodem δ vedené, samodružnými paprsky soumístných svazků $ABC..$ π $A'B'C'..$; paprsky ty jsou dva, neb dva splývající neb jsou imaginarné, dle toho, je-li bod δ vně kuželosečky, neb na ni aneb uvnitř čáry.

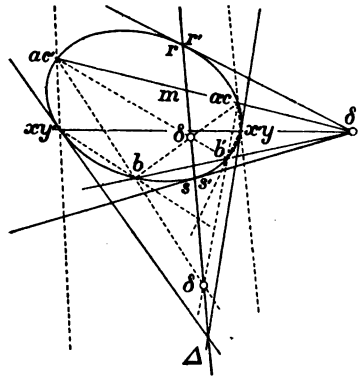
Protneme-li křivé svazky přímkami B', B v perspektivných řadách, shledáme obdobně, že spojnice $(\overline{BA'})\ (\overline{B'A})$, $(\overline{BC'})\ (\overline{B'C})$,.. procházejí jedním bodem, a sice opět bodem δ, jelikož dle věty Brianchonovy v opsaném šestiúhelníku $AB'CA'BC'$ spojnice protějších vrcholů $(\overline{AB'})\ (\overline{A'B})$, $(\overline{B'C})\ (\overline{BC'})$, $(\overline{CA'})\ (\overline{C'A})$ procházejí jedním bodem.

Jsou-li $ABC..$ π $A'B'C'..$ *dva projektivné křivé svazky na kuželosečce, procházejí všecky spojnice* $(\overline{XY'})\ (\overline{X'Y})$ *jedním bodem* δ, *jímž procházejí též samodružné paprsky křivých svazků*; *bod* δ *nazveme direkčním středem svazků.*

63. Involuce bodová na kuželosečce.

Dvě projektivné křivé řady na téže kuželosečce jsou involutorné, jakmile se v nich vyskytnou dva involutorně sdružené body; promítnou se totiž z libovolného bodu kuželosečky dvěma soumístnými projektivnými svazky, v nichž se vyskytuje jeden involutorný pár paprskový, které tudíž jsou involutorné a stanoví na kuželosečce involutorné řady křivé.

Obr. 79.



Involuce bodová na kuželosečce jest stanovena dvěma páry a, a'; b, b', jsouc totiž souhrnem projektivných řad $abc\ldots$ π $a'b'c'\ldots$, kde $c \equiv a'$, $c' \equiv a$. Další její páry sestrojíme (obr. 79.) pomocí osy direkční Δ (čl. 62.), procházející body $(\overline{ab'}\ \overline{a'b})$, $(\overline{bc'}\ \overline{b'c})$; přímka $\overline{ac'}$ jakožto spojnice dvou soumezných bodů čáry jest tečna, a taktéž přímka $\overline{a'c}$, tak že se i průsečík tečen, sestrojených v bodech a, a', nalézá na Δ.

K libovolnému bodu x obdržíme sdružený x', uvážíme-li, že $\overline{ax'}$ protíná $\overline{a'x}$ na Δ; ovšem se protínají také $\overline{cx'}$ a $\overline{c'x}$ na Δ, z čehož patrno, že Δ jest jednou diagonálnou stranou úplného čtyrrohu $aa'xx'$. Každé dva sdružené body x, x' se jeví jakožto průměty téhož bodu přímky Δ z bodů a, a' stanovené; a z toho jest patrno, že bod přímky musí býti na kuželosečce, aby vedl ke dvěma splývajícím sdruženým bodům. Protíná-li Δ kuželosečku v bodech r, s, jsou tyto samodružné body $r \equiv r'$, $s \equiv s'$ involuce.

Z úplného čtyrrohu $aa'xx'$, v němž Δ jest diagonálnou stranou, jejíž protější roh diagonálný označíme δ, vychází, že body a, a' m, δ jsou harmonické, označíme-li m bod na spojnici $\overline{aa'}$ a na Δ položený. Probíhá-li x křivou řadu, mění také x' svou polohu, avšak vždy jest Δ diagonálnou stranou čtyrrohu $aa'xx'$, a tedy body a, a' m pevny; jest tedy také čtvrtý harmonický bod δ pevný, t. j. spojnice $\overline{xx'}$ prochází pevným bodem δ, jenž sluje středem involuce, Δ pak osou její. Počítáme-li x do druhé řady, značíce jej y', přísluší mu v první ovšem $y \equiv x'$, a spojnice $\overline{xy'}$, $\overline{x'y}$ t. j. tečny v bodech x, x' se protínají na Δ. Tím celkem nalézáme tuto větu:

Jsou-li a, a'; b, b'; x, x';.. *páry bodové involuce na kuželosečce, procházejí spojnice* $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$, $\overline{xx'}$,.. *jedním bodem* δ, *středem involuce, a protínají se obecně přímky* $\overline{xy'}$, $\overline{x'y}$ *na jedné přímce* Δ, *ose involuce, na níž se protínají též tečny, sestrojené v sdružených bodech. Každé dva páry involuce tvoří úplný čtyrroh, v němž jsou* Δ *a* δ *diagonálnou stranou a protějším diagonálným rohem.*

Kterak se věty té užívá k sestrojení involuce, jest zjevno.

Involuce bodová na kuželosečce jest svým středem δ *úplně sta-*

novena; stačí a jest nutno pokládati za dva její páry a, a'; b, b' průsečíky dvou sečen vedených středem δ. Osou její jest pak diagonálná strana Δ úplného čtyrrohu $aa'bb'$, protější k diagonálnému rohu δ. Involuci tu nazveme *bodovou involucí indukovanou bodem δ na kuželosečce.*

Jsou-li δ', δ'' další dva diagonálné rohy tohoto úplného čtyrrohu, má involuce o středu δ' za osu přímku $\overline{\delta\delta''}$ a involuce o středu δ'' osu $\overline{\delta\delta'}$. Přímka $\overline{\delta'\delta''}$ čili Δ, procházejíc středy obou těchto involucí, stanoví bodový pár r, s patřící do obou těchto involucí; tečny v bodech r a s se tudíž protínají jak na ose $\overline{\delta\delta''}$ tak na ose $\overline{\delta\delta'}$, t. j. procházejí bodem δ. *Tečny sestrojené v samodružných bodech involuce, procházejí středem jejím*; věc přirozená, jelikož lze tyto tečny pojímati jakožto spojnice sdružených soumezných bodů $\overline{rr'}$, $\overline{ss'}$.

Stanovíce involuci na kuželosečce středem δ, mlčky předpokládáme, že δ není na kuželosečce, neboť jen pak lze sečnami bodem δ vedenými vytknouti dva páry bodové a tím i involuci. Volíme-li δ přece na kuželosečce, protne každá přímka jím vedená kuželosečku v bodovém páru, jehož jeden element jest pevný, totiž bod δ; páry ty tvoří involuci degenerovanou, o samodružných bodech splývajících s bodem δ (čl. 35.), čili involuci parabolickou. Osa její Δ, jakožto geometrické místo průsečíků tečen v sdružených bodech, jest tečna v bodě δ.

Jakožto applikaci vytkněme větu: *Otáčí-li se ramena pravého úhlu kolem vrcholu v položeného na kuželosečce Σ, protnou tato Σ mimo v v podvojných bodech a, a', jichž spojnice prochází pevným bodem δ, položeným na normále čáry v bodě v sestrojené.* Ramena pravého úhlu jsou páry involuce, a tedy také body a, a' a tudíž prochází $\overline{aa'}$ pevným bodem δ. Tečna s normálou v bodě v tvoří pár involuce, stanovící na Σ pár bodový v, v', značí-li v' druhý průsečík normály s čarou; spojnice $\overline{vv'}$ t. j. normála prochází tedy bodem δ.

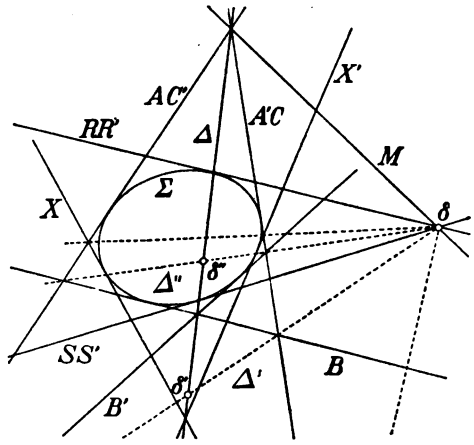
64. Involuce paprsková (tečnová) na kuželosečce.

Dva projektivné křivé svazky na téže kuželosečce jsou involutorné, jakmile se v nich vyskytnou dva involutorně sdružené paprsky. Souhrn takových dvou svazků sluje involucí paprskovou č. tečnovou na kuželosečce.

Involuce paprsková na kuželosečce jest dvěma páry A, A'; B, B' stanovena; jest ona totiž souhrnem projektivných svazků

$ABC\ldots\ \pi\ A'B'C'\ldots$, kde $C \equiv A'$, $C' \equiv A$. Další páry sestrojíme (obr. 80.) pomocí středu direkčního δ (čl. 62.), jímž procházejí spojnice $(\overline{AB'})\ (\overline{A'B})$, $(\overline{BC'})\ (\overline{B'C})$; bod (AC') jakožto průsečík dvou soumezných tečen jest bodem dotyčným, a taktéž bod $(A'C)$, tak že spojnice dotyčných bodů tečen A, A' též prochází středem δ. K libovolnému paprsku X obdržíme sdružený X', uváživše, že spojnice bodů (AX'), $(A'X)$ prochází středem δ; bodem δ prochází arci také spojnice $(\overline{CX'})\ (\overline{C'X})$, z čehož patrno, že δ jest diagonálným rohem úplného čtyrstranu $AA'XX'$.

Obr. 80.



Každé dva sdružené paprsky X, X' se jeví jakožto tečny vedené z bodů, stanovených na A a A' týmž paprskem svazku δ; z čehož patrno, že tento paprsek musí býti tečnou, má-li vésti k dvěma splývajícím sdruženým elementům. Procházejí-li bodem δ tečny R, S, jsou tyto samodružnými paprsky $R \equiv R'$, $S \equiv S$ dané involuce.

Z úplného čtyrstranu $AA'XX'$, v němž jest δ diagonálným rohem, jehož protější stranu diagonálnou označíme Δ, plyne, že paprsky $A\ A'\ M\ \Delta$ jsou harmonické, označíme-li M paprsek body (AA') a δ procházející. Mění-li se X, zůstává v proměnlivém čtyrstranu diagonalný roh δ a tedy také paprsek M pevným; jest tudíž také čtvrtý harmonický paprsek Δ pevným, t. j. průsečíky sdružených paprsků (XX') jsou na pevné přímce Δ, jež sluje osou dané involuce, bod δ pak středem jejím. — Poněvadž lze pár X, X' též označiti jakožto pár Y', Y, a poněvadž spojnice $(\overline{XY})\ (\overline{X'Y})$ t. j. spojnice dotyčných bodů sdružených tečen prochází bodem δ, máme větu:

Jsou-li A, A'; B, B'; X, X';.. páry paprskové involuce na kuželosečce, nalézají se průsečíky sdružených paprsků (AA'), (BB'), (XX'),.. na jedné přímce Δ, ose involuce, a prochází obecně spojnice bodů (XY') a $(X'Y)$ pevným bodem δ, středem involuce, jímž procházejí také spojnice dotyčných bodů sdružených paprsků. Každé dva páry involuce tvoří úplný čtyrstran, v němž jsou δ a Δ diagonálným rohem a protější diagonálnou stranou.

Kterak lze užiti této věty ke konstrukci paprskové involuce na kuželosečce, dané dvěma páry A, A'; B, B', jest patrné.

Involuce paprsková na kuželosečce jest osou Δ úplně stanovena; stačí a jest nutno pokládati za dva její páry A, A'; B, B' tečny vedené dvěma body osy Δ. Střed její jest diagonálný roh δ úplného čtyrstranu $AA'BB'$, protější k Δ. Involuce ta sluje *paprskovou involucí indukovanou přímkou Δ na kuželosečce.*

Jsou-li Δ', Δ'' další dvě diagonálné strany tohoto čtyrstranu, má paprsková involuce o ose Δ' za střed bod $(\Delta\Delta'')$, a involuce o ose Δ'' za střed $(\Delta\Delta')$. Bodem $(\Delta'\Delta'')$ čili δ položeným na osách obou těchto involucí procházejí dvě tečny R, S, jež tvoří pár obou těchto involucí; spojnice dotyčných bodů tečen těchto prochází tedy jak středem δ', tak středem δ'', t. j. spojnice ta jest přímka $\delta'\delta''$ čili Δ. *Samodružné paprsky involuce se tedy dotýkají kuželosečky v bodech položených na ose Δ involuce.*

Při stanovení involuce tečnové na kuželosečce osou Δ jsme mlčky předpokládali, že Δ se nedotýká kuželosečky; je-li Δ tečnou, tu páry tečen, vedených jednotlivými body osy, mají jeden společný paprsek, t. osu Δ; involuce těmito páry vytvořená jest parabolická (čl. 35.), a její střed, jímž procházejí spojnice dotyčných bodů sdružených paprsků, jest dotyčný bod osy Δ, která representuje dva splývající samodružné elementy involuce.

65. Pól a polára.

Libovolný bod δ v rovině kuželosečky Σ (obr. 79.) indukuje na Σ involuci bodovou, jejíž jest středem; *osa Δ této involuce sluje polárou bodu δ vzhledem ke kuželosečce, a bod δ sluje pólem jejím.*

Libovolná přímka Δ v rovině kuželosečky Σ (obr. 80.) indukuje na Σ involuci paprskovou, jejíž jest osou; *střed δ této involuce sluje pólem přímky Δ vzhledem ke kuželosečce, a přímka Δ*

sluje jeho polárou. Souhlasnost těchto dvou definicí vychází takto: Dle čl. 63. se protínají tečny sestrojené v sdružených bodech involuce, kterou stanoví střed δ, na ose Δ této involuce; *tvoří tedy tečny v sdružených bodech involuce páry involuce paprskové, a obě involuce mají společný střed a osu.* Obdobně, dle čl. 64., procházejí spojnice dotyčných bodů sdružených tečen involuce paprskové jedním bodem, středem jejím; *tvoří tedy dotyčné body sdružených elementů involuce paprskové involuci bodovou, a obě involuce mají společnou osu a střed.*

Pól a polára jsou tedy střed a osa jak involuce bodové, stanovené pólem jakožto středem, tak involuce paprskové, stanovené polárou jakožto osou její. Definici indukované involuce rozšíříme v ten smysl, že *obě involuce na kuželosečce označíme jakožto indukované jak pólem tak polárou.* Polára bodu na kuželosečce jest tečna toho bodu, a pól tečny jest její dotyčný bod.

Polára vnějšího bodu jest přímka spojující dotyčné body tečen vedených pólem; pól sečny jest průsečík tečen sestrojených v bodech, v nichž polára protíná kuželosečku. *Jest tedy polára vnějšího bodu sečnou, a naopak pól sečny vnějším bodem; a tudíž pól nesečny vnitřním bodem, a naopak polára vnitřního bodu nesečnou.*

Vedeme-li pólem δ (obr. 79.) sečnu protínající kuželosečku v bodech x, x', poláru Δ v bodě x_0, jsou δ, x_0, x, x' čtyři body harmonické, poněvadž Δ jest diagonálnou stranou úplného čtyrrohu $aa'xx'$ a δ jejím protějším diagonálným rohem. *Polára obsahuje tedy všecky body x_0, harmonické k pólu δ vzhledem k bodům kuželosečky.* Dle toho jest věcí snadnou sestrojiti pouhým pravítkem poláru libovolného bodu vzhledem ke kuželosečce, dané pěti body.

Obdobně plyne, že *pólem nějaké přímky procházejí všecky paprsky harmonické k poláře vzhledem k tečnám kuželosečky;* stačí v obr. 80. přihlédnouti k úplnému čtyrstranu $AA'XX'$ a poznamenati, že spojnice X_0 rohu (XX') s diagonálným rohem δ jest harmonická k diagonálné straně Δ vzhledem k stranám X, X'. Z toho vychází ihned lineárné sestrojení pólu libovolné přímky vzhledem ke kuželosečce, dané pěti tečnami.

66. Polárné vlastnosti kuželosečky, sdružené body a sdružené přímky.

Z článků 63. a 64. jest patrna správnost těchto dvou vět:

Je-li čtyrroh kuželosečce vepsán, jest každá diagonálná strana jeho polárou protějšího diagonálného rohu.

Je-li čtyrstran kuželosečce opsán, jest každý diagonálný roh jeho pólem protější diagonálné strany.

Trojúhelník, v němž každá strana jest polárou protějšího rohu, a tedy i každý roh pólem protější strany, sluje polárným trojúhelníkem kuželosečky; lze tedy říci, že *diagonálný trojúhelník jak vepsaného úplného čtyrrohu, tak opsaného úplného čtyrstranu, jest polárným.*

Je-li bod δ' na poláře bodu δ, jest i bod δ na poláře bodu δ'. Veďme (obr. 79.) bodem δ libovolnou sečnu, protínající kuželosečku v bodech a, a', a protněme čáru spojnicí $a\delta'$ v bodě b', jemuž přislušiž b involucí o středu δ. Polára Δ se jeví jakožto diagonálná strana úplného čtyrrohu $aa'bb'$; polára bodu δ' jest protější diagonálná strana $\delta\delta''$, procházející bodem δ, jak bylo dokázati.

Prochází-li přímka Δ' pólem přímky Δ, prochází i Δ pólem přímky Δ'. Zvolme (obr. 80.) na Δ libovolný vnější bod, jímž nechť procházejí tečny A, A', a veďme bodem $(A\Delta')$ tečnu B', jíž přislušiž B involucí paprskovou o ose Δ. Pól δ se jeví jakožto diagonálný roh úplného čtyrstranu $AA'BB'$; pól přímky Δ' jest protější diagonálný roh $(\Delta\Delta'')$, ležící na přímce Δ, jak bylo dokázati.

Z těchto dvou vět jde, že *průsečík dvou přímek jest pólem spojnice jich pólů, a že spojnice dvou bodů jest polárou průsečíku jich polár.* Na př. průsečík dvou tečen jest pólem spojnice jich dotyčných bodů, a spojnice dvou bodů kuželosečky jest polárou průsečíku jich tečen.

Dva body slují sdružené aneb sdružené čili reciproké póly vzhledem ke kuželosečce, je-li jeden na poláře druhého; dvě přímky slují sdružené neb i sdružené č. reciproké poláry, prochází-li jedna pólem druhé. Veškeré body poláry jsou tedy sdruženy s pólem a veškeré přímky pólem vedené jsou sdruženy s polárou. Speciálně jest bod kuželosečky sdružen se všemi body jeho tečny a tudíž také s sebou samým, a tečna jest sdružena se všemi přímkami, vedenými dotyčným bodem, a tedy také sama s sebou.

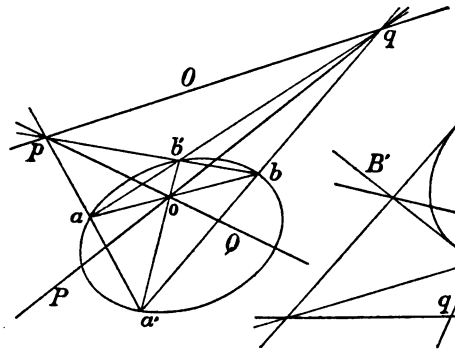
Probíhá-li pól přímou řadu, otáčí se polára kolem pólu této řady, a svazek polár jest projektivný s řadou pólů.

Budiž (obr. 81.) O přímá řada, jíž pól p probíhá, a buď o pólem jejím. Zvolme na čáře libovolný bod a, a označme b druhý průsečík čáry se spojnicí $\overline{ao}$.

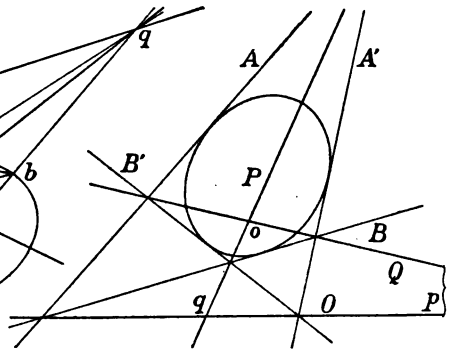
Otáčí-li se polára kolem bodu vytvořujíc svazek, probíhá pól přímou řadu na poláře onoho bodu, a řada pólů jest projektivná se svazkem polár.

Budiž (obr. 82.) o bod, kolem něhož se polára P otáčí, a buď O jeho polára. Zvolme libovolnou tečnu A, a označme B druhou tečnu procházející bodem (AO).

Obr. 81.



Obr. 82.



Buďte aa', bb' dvě družiny bodové involuce o středu p; pak jest diagonálná strana P úplného čtyrrohu $aa'bb'$, protější k diagonálnému rohu p, polárou tohoto bodu, a poněvadž $\overline{ab}$ prochází bodem o, musí se $\overline{ab}$, $\overline{a'b'}$ protínati v o. Polára O diagonálného rohu o jest protější diagonálná strana, a zapadá tedy diagonálný roh q na O.

Probíhá-li p řadu O, a pokládáme-li bod a, a tedy i b za pevný, opisuje paprsek $\overline{ap}$ perspektivný svazek, a paprsek

Buďte AA', BB' dvě družiny paprskové involuce o ose P; pak jest diagonálný roh p úplného čtyrstranu $AA'BB'$, protější k diagonálné straně P, pólem této strany, a poněvadž musí býti na O, obsahuje tato přímka body (AB), $(A'B')$. Pól o diagonálné strany O jest protější diagonálný roh, a prochází tedy diagonálná strana Q bodem o.

Vytvořuje-li otáčející se paprsek P svazek o, a pokládáme-li paprsek A, a tedy i B za pevný, opisuje bod (AP)

$\overline{ba'}$ čili $\overline{bq}$ k němu projektivný svazek o vrcholu b; k tomuto svazku jest ale svazek polár P o vrcholu o perspektivný, a tedy projektivný k řadě pólů p na O, jak bylo dokázati.

Polára bodu q jest protější diagonálná strana Q úplného čtyrrohu $aba'b'$. Body p, q, z nichž každý jest na poláře druhého, jsou sdružené vzhledem ke kuželosečce. Řada bodů q souvisela projektivně s řadou bodů p na O, a příslušnost ta jest patrně involutorná. Samodružný bod $p \equiv q$ těchto involutorných řad vznikne jen tehdy, kdy bod p jest na své poláře, t. j. kdy p jest na kuželosečce. Tím plyne další věta:

Sdružené body na přímce tvoří páry involuce, jejíž samodružné body jsou průsečíky přímky s kuželosečkou; involuce ta sluje indukovaná na přímce.

Přímky P, Q, z nichž každá prochází pólem druhé, jsou sdruženy a promítajíce bodový pár q, p z pevného bodu o, jsou párem paprskové involuce; samodružný paprsek její jest přímka sobě polárně přidružená, t. j. tečna vedená bodem o, čímž nalezena věta, na pravé straně odvozená.

perspektivnou řadu, a bod (BA') čili (BQ) k ní projektivnou řadu na B; k této řadě jest ale řada pólů p na O perspektivná, a tedy projektivná k svazku polár P na vrcholu o, jak bylo dokázati.

Pól přímky Q jest protější diagonálný roh q úplného čtyrstranu $ABA'B'$. Přímky P, Q, z nichž každá prochází pólem druhé, jsou sdruženy vzhledem ke kuželosečce. Svazek přímek Q souvisel projektivně se svazkem polár o vrcholu o, a souvislost ta jest patrně involutorná. Samodružný paprsek $P \equiv Q$ těchto involutorných svazků vznikne jen tehdy, kdy přímka P prochází svým pólem, t. j. kdy P jest tečnou kuželosečky. Tím plyne věta:

Sdružené přímky bodem procházející tvoří páry involuce, jejíž samodružné paprsky jsou tečny tím bodem vedené; involuce ta sluje indukovaná v bodě.

Body p, q, z nichž každý jest na poláře druhého, jsou sdruženy, a jsouce stopy involutorného páru Q, P na pevné přímce O, jsou párem bodové involuce; samodružné body její jsou body polárně sobě přidružené, t. j. body na kuželosečce, čímž nalezena věta, po levé straně odvozená.

Involuce indukovaná kuželosečkou na přímce se tedy promítá z pólu přímky involucí paprskovou, indukovanou kuželosečkou v pólu

Obě věty lze stručněji takto vysloviti:

Sdružené body na přímce O tvoří páry involuce, jež se

promítá z pólu *o* přímky involucí sdružených přímek; průsečíky přímky *O* s kuželosečkou jsou samodružné body první involuce, a tečny kuželosečky bodem *o* procházející jsou samodružné paprsky druhé involuce.

O první involuci jsme pravili, že jest *indukována* kuželosečkou na přímce *O*, a o druhé, že jest *indukována* v bodě *o*. Je-li *O* sečnou, jest *o* vnějším bodem a obě involuce mají dva reálné samodružné elementy, t. j. jsou hyperbolické; je-li *O* nesečnou, tedy *o* vnitřním bodem, pravíme, že *O* protíná kuželosečku v páru imaginárných bodů, a že ty se promítají z *o* párem imaginárných tečen, jež jsou imaginárnými samodružnými elementy indukovaných involucí elliptických. — Je-li *O* tečnou, tedy její pól *o* dotyčným bodem, jsou obě indukované involuce parabolické; dotyčný bod *o* repraesentuje dva splývající samodružné elementy bodové, a tečna *O* dva splývající samodružné elementy paprskové involuce.

Přihlédneme-li k obrazci na levé straně, jest *a*, *b* párem bodové involuce, indukované na čáře bodem *o*, a *p*, *q* průmětem tohoto páru z bodu *a'* na *O*; čímž tato věta:

Involuce bodová, indukovaná bodem o na kuželosečce, se promítá z libovolného bodu kuželosečky na poláru O do involuce, indukované kuželosečkou na O, a naopak: *Involuce sdružených bodů na přímce O se promítá z libovolného bodu kuželosečky na tuto čáru do involuce, indukované pólem o.*

Týž obrazec ukazuje, že pár *p*, *q* plyne promítáním bodu *a'* ze dvou bodů *a*, *b*, jichž spojnice prochází pólem *o*, t. j. *promítáme-li body kuželosečky ze dvou její bodů, jež jsou s pólem o na přímce, na poláru O, obdržíme páry involuce, indukované na poláře, a naopak.*

Obrazec po pravé straně vede k reciprokým větám, jež pouze vytkneme:

Involuce paprsková, indukovaná na kuželosečce přímkou O, protne libovolnou tečnu A' v involuci bodové, jež se promítá z pólu o involucí, indukovanou kuželosečkou v bodě o, a naopak: *Involuce sdružených přímek bodem o procházejících, protíná libovolnou tečnu v párech bodových, jimiž procházejí podvojně tečny, tvořící páry involuce, indukované polárou O.*

Protneme-li každou tečnou dvě pevné tečny, jež se s přímkou O v jednom bodě sbíhají, a spojíme-li průsečíky s pólem o přímky O, obdržíme paprskový pár involuce, indukované kuželosečkou v bodě o, a naopak.

67. Polárné trojúhelníky.

Každé dva vrcholy a každé dvě strany polárného trojúhelníku jsou vzhledem ke kuželosečce sdruženy; proto se zovou vrcholy jeho *trojinou sdružených bodů*, a strany jeho *trojinou sdružených přímek.*

Každý polárný trojúhelník lze vytvořiti na nekonečně mnoho způsobů jakožto diagonálný trojúhelník úplného čtyrrohu do kuželosečky vepsaného, aneb úplného čtyrstranu kuželosečce opsaného. Jest-li totiž (obr. 81.) opq daný polárný trojúhelník, zvolme bod a libovolně na kuželosečce, a označme b průsečík přímky $\overline{ao}$ s kuželosečkou. Jsou-li a, a'; b, b' páry involuce, indukované bodem p, jest jeho polára $\overline{oq}$ diagonálnou stranou úplného čtyrrohu $aa'bb'$, a obdobně polára $\overline{pq}$ bodu o diagonálnou stranou téhož čtyrrohu, t. j. $(\overline{ab}\ \overline{a'b'}) \equiv o$, $(\overline{ab'}\ \overline{a'b}) \equiv q$, čímž první výrok dokázán. Způsobem reciprokým by plynul výrok druhý, o opsaném čtyrstranu.

Obr. 81. ukazuje, že lze jeden roh a libovolně voliti; *promítnutím vrcholů polárného trojúhelníku z libovolného bodu a kuželosečky na touž obdržíme další tři rohy úplného čtyrrohu, jehož diagonálným trojúhelníkem jest daný polárný trojúhelník.* Tyto další tři rohy a', b, b' tvoří trojúhelník, jehož strany procházejí vrcholy polárného trojúhelníku, a sice každá strana oním vrcholem, jehož průmětem jest vrchol protější.

Obdobně by plynula z obr. 82. věta reciproká, že *průsečíky stran polárného trojúhelníku s libovolnou tečnou procházejí tři další tečny tvořící s první opsaný čtyrstran, jehož diagonálným trojstranem jest daný polárný trojúhelník.*

Involuce indukovaná pólem p na kuželosečce má dva páry a, a'; b, b', involuce indukovaná pólem q má páry a, b'; b, a', a involuce indukovaná pólem o páry a, b; a', b'. Dle čl. 37. jest z těchto tří involucí jedna elliptickou a dvě jsou hyperbolickými, t. j. *z tří vrcholů polárného trojúhelníku jest jeden vnitřním a dva jsou vnějšími body.*

Při sestrojení polárného trojúhelníku lze jeden vrchol n. p. p libovolně zvoliti, druhý o pak libovolně na poláře P prvního; polára O bodu o protne pak P v třetím vrcholu q, neboť polára tohoto bodu jest dle čl. 66. přímka $\overline{po}$. Zvolíme-li pól p uvnitř, jsou q i o vně, a sice lze přímku $\overline{pq}$ libovolně voliti; přímka $\overline{pq}$ jakožto polára vnějšího bodu o protne kuželo-

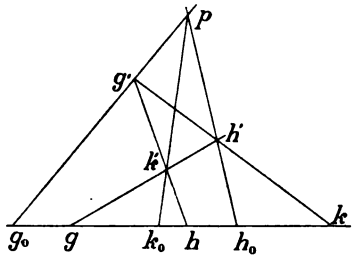
sečku, čímž na novo dokázáno (čl. 61.), že *každá přímka vnitřním bodem vedená jest sečnou*, a dále, že *polára vnitřního bodu jest nesečnou, polára vnějšího bodu ovšem sečnou.*

Jsou-li g, g' a h, h' dva páry sdružených bodů, jsou $k \equiv (\overline{gh}\ \overline{g'h'}), k' \equiv (\overline{gh'}\ \overline{g'h})$ další dva sdružené body, t. j. *dva páry sdružených bodů tvoří úplný čtyrroh, jehož dva diagonálné rohy, neležící na spojnicích sdružených bodů, jsou též sdruženými body.*

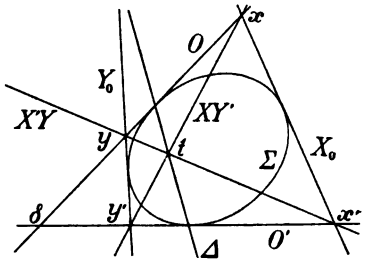
Jsou-li G, G' a H, H' dva páry sdružených přímek, jsou $(GH)\,G'H')$, $(GH')\,(G'H)$ další dvě sdružené přímky, t. j. *dva páry sdružených přímek tvoří úplný čtyrstran, jehož dvě diagonálné strany, neprocházející průsečíky sdružených přímek, jsou též sdruženými přímkami.*

Abychom dokázali větu v levo, vytkněme pól p přímky gh (obr. 83.); jím prochází jak polára bodu g, tak polára bodu h,

Obr. 83.



Obr. 84.



a jsou tedy $\overline{pg'}$, $\overline{ph'}$ tyto dvě poláry. Jich průsečíky g_0, h_0 s přímkou $\overline{gh}$ jsou ovšem sdruženy s g resp. s h, tak že gg_0; hh_0 jsou dva páry involuce sdružených bodů na $\overline{gh}$. Z úplného čtyrrohu $pg'h'k'$ vychází (čl. 34.), že páry gg_0, hh_0, kk_0 jsou v involuci, že tedy k, k_0 jsou též dvěma sdruženými poly, a tudíž $\overline{pk_0}$ polárou bodu k, a tudíž k' sdružen s bodem k, jak bylo dokázati.

Věta na pravé straně by se dokázala úvahou reciprokou.

68. Projektivné svazky sdružených přímek a řady sdružených bodů.

Buďte o, o' dva body *nesdružené* vzhledem ke kuželosečce Σ, t. j. předpokládejme, že bod o' není na poláře O bodu o. Libovolnému paprsku A svazku o přísluší pól a na O položený, a spojnice $\overline{o'a}$ jest přímka A' sdružená s A, bodem o' procházející.

Přidružíme-li paprskům A B C.. svazku o ve svazku o' paprsky A' B' C'.. s nimi polárně sdružené, jest svazek ABC.. π A'B'C'.. Jest totiž svazek *ABC..* projektivný s řadou pólů *abc..* na *O*, a k této řadě jest svazek *A'B'C'..* perspektivný.

Reciprokým způsobem vznikají na dvou *nesdružených* přímkách *O*, *O'* projektivné řady; k libovolnému bodu *a* řady *O* nalézáme na přímce *O'* jediný sdružený bod *a'*, totiž průsečík poláry *A* bodu *a* s přímkou *O'*. *Řada bodů abc.. na O jest projektivná s řadou sdružených pólů a'b'c'.. na O*; jest ona totiž projektivná se svazkem polár *ABC..*, a k tomuto jest řada *a'b'c'..* perspektivná.

69. Pól a polára u zvrhlých čar.

Definice pólu a poláry odpadá u zvrhlých čar, jak bodové tak tečnové; lze však použiti vlastností vyvinutých na konci čl. 65. k jich definici.

Polárou P libovolného bodu p vzhledem k degenerované kuželosečce bodové, skládající se ze dvou přímek A, B, nazýváme geometrické místo bodů harmonicky oddělených od pólu p zvrhlou čarou. Jest tedy polára přímka harmonická k $\overline{op}$ vzhledem k *A*, *B*, značí-li *o* průsečík přímek *A*, *B*.

Polára každého bodu prochází bodem *o*; póly položené na přímce, bodem *o* vedené, mají touž poláru.

Pólem p libovolné přímky P vzhledem k degenerované kuželosečce tečnové, skládající se ze dvou bodů a, b, nazýváme geometrické místo (obálku) paprsků harmonicky oddělených od poláry P zvrhlou čarou. Jest tedy pól bod harmonický k (*OP*) vzhledem k *a*, *b*, značí-li *O* spojnici bodů *a*, *b*.

Pól každé přímky jest na přímce *O*; poláry, vedené týmž bodem přímky *O*, mají tentýž pól.

Kapitola VIII.

Strojení kuželoseček z imaginárných bodů a tečen. Adjungovaná involuce. Soumístné projektivné útvary o splývajících elementech samodružných.

70. Imaginárné body, paprsky a roviny.

Volíme-li dva elementy základného útvaru, na př. dva body řady bodové, za samodružné elementy involuce, jest tato úplně

stanovena, a naopak stanoví tato involuce hyperbolická ony dva body jakožto samodružné. Je-li dána involuce elliptická, nemá reálných samodružných elementů; *my jí připisujeme dva samodružné elementy imaginárné, involucí stanovené.* Stanoví tedy bodová involuce elliptická dva konjugované imaginárné body řady, a paprsková dva imaginárné konjugované paprsky svazku; řada se jeví jakožto spojnice oněch dvou imaginárných bodů, a vrchol svazku jakožto průsečík oněch imaginárných paprsků. Obdobně ve svazku rovin stanoví elliptická involuce dvě imaginárné roviny svazku, totiž samodružné roviny, a osa svazku se jeví jakožto průsečná přímka těchto dvou rovin.

Reálná involuce elliptická se tím zavádí jakožto útvar adaequatní dvěma imaginárným elementům tak sice, že dva imaginárné elementy pokládáme za dané resp. stanovené, jest-li dána resp. stanovena elliptická involuce, jejíž jsou elementy dvojnými. Také u neinvolutorných útvarů soumístných projektivných se stává, že nemají reálných samodružných elementů, a možno jim přiřknouti dva imaginárné elementy samodružné; avšak takové útvary nejsou stanoveny elementy samodružnými, nýbrž jimi a ještě jedním párem sdružených elementů, tak že útvary sice stanoví samodružné elementy, ne však tyto elementy ony útvary. Nelze tedy o hořejší adaequatnosti mluviti; dole (čl. 75.) ukážeme, kterak lze imaginárné elementy, stanovené jakožto samodružné dvou neinvolutorných útvarů, vytknouti involucí, t. j. kterak lze sestrojiti involuci o týchž samodružných elementech.

Stanoví-li involuce elliptická na přímce P dva imaginárné body r, s, a promítneme-li ji involucí paprskovou, jest tato patrně také elliptická, a imaginárné samodružné paprsky její pokládáme za průměty bodů r, s; promítáme-li elliptickou involuci bodovou na jinou přímku do nové involuce elliptické, jsou její samodružné imaginárné body projekcemi samodružných imaginárných bodů první involuce, a p.

71. Imaginárné body jakožto průsečíky kuželosečky s přímkou a paprsky jakožto tečny bodem.

Na imaginárné body a paprsky, definované jakožto samodružné elementy elliptických involucí, budeme nazírati ještě druhým způsobem.

Dána-li kuželosečka a libovolný bod t, lze tečny bodem

tím procházející, dle čl. 60., stanoviti jakožto samodružné paprsky dvou projektivných svazků o vrcholu t; svazky ty promítají řady, vznikající na dvou pevných tečnách O, O' kuželosečky všemi tečnami jejími. Aby vznikající svazky byly involutorné, jest nutné a stačí (čl. 34.), aby se bod t nalézal na direkční ose projektivných řad, t. j. na spojnici dotyčných bodů pevných tečen O, O'. Veďme tedy bodem t sečnu Δ (obr. 84.), která nechť protíná kuželosečku v bodech, v nichž tečny nazveme O, O'; tečny X_0.. kuželosečky protnou O v bodech x,.., přímku O' v bodech x',.. a řady x.. π x'.. se promítají z bodu t dvěma involutornými svazky X.. π X'... Mají-li tyto svazky samodružné paprsky, jsou to tečny bodem t procházející. *Jest-li involuce X.. π X'.. elliptická, pokládáme její imaginárné samodružné paprsky za tečny bodem t procházející.* Přípustnost názoru toho ovšem vyžaduje, aby involuce paprsková byla nezávislá na volbě pevných tečen O, O'; skutečně vychází tato nezávislost následující úvahou. Spojnice $\overline{tx}$ nechť protne řadu O' v y'; bodu tomu přísluší projektivně na řadě O bod y hovící výroku, že ($\overline{xy'}$ $\overline{x'y}$) jest na Δ, tak že se $\overline{xy'}$, $\overline{x'y}$ protínají v t. Paprsky X, X' jsou tedy diagonálné strany úplného čtyrstranu $OO'X_0Y_0$ kuželosečce opsaného, značíme-li Y_0 tečnu $\overline{yy'}$; dle čl. 67. jsou X, X' dvě sdružené poláry a *involutorné svazky XY.. π $X'Y'$.. jsou prostě involucí sdružených polár, kterou kuželosečka indukuje v bodě t*, a tudíž nezávislé na volbě sečny Δ.

Mimochodem nalézáme přihlížejíce k tečnám $OO'X_0$ a k bodu t, položenému na poláře Δ bodu δ, tuto větu:

Je-li trojstran kuželosečce opsán, tu se promítají dva vrcholy jeho x, x' z každého bodu t sdruženého s třetím vrcholem δ dvěma sdruženými paprsky X, X'.

Reciprokým způsobem stanovíme průsečíky přímky T (čl. 59.) s kuželosečkou jakožto samodružné body dvou projektivných řad na T; řady ty jsou řezy dvou projektivných svazků, vytvořujících kuželosečku. Volíme-li na přímce T vnější bod δ a dotyčné body o, o' tečen jím vedených za vrcholy svazků vytvořujících kuželosečku, jest δ direkčním středem těchto svazků (čl. 49.) a přímka T, procházejíc tímto středem, protne svazky ve dvou involutorných řadách (čl. 34.). Samodružné body této involuce jsou průsečíky kuželosečky s přímkou T; *jest-li tato involuce elliptická, pokládáme její imaginárné samodružné body za průsečíky přímky T s kuželosečkou.* Tyto body musí ovšem býti kuželosečkou a přímkou T úplně stanoveny,

a tedy nezávislé na volbě bodu δ, t. j. involuce na T stanovená musí býti vždy táž, nechť vnější bod δ volíme na T jakkoli. Že tomu skutečně tak, vychází na jevo tím, že *involuce na T stanovená jest prostě involucí sdružených pólů, indukovanou kuželosečkou na přímce T*, což by bylo lze způsobem analogickým dokázati, jako se stalo nahoře. — Značíme-li x_0 libovolný bod kuželosečky, protnou $\overline{ox_0}$, $\overline{o'x_0}$ přímku T ve dvou sdružených bodech, a máme tedy, přihlížejíce k trojúhelníku $oo'x_0$ čáře vepsanému, tuto větu:

Je-li tříroh $oo'x_0$ kuželosečce vepsán, protne každá přímka T, sdružená s jednou stranou $\overline{oo'}$, ostatní dvě strany ve dvou sdružených pólech.

Jest totiž Δ, procházejíc pólem δ přímky $\overline{oo'}$, sdružená polára s touto přímkou.

72. Strojení kuželosečky, dané třemi reálnými a dvěma konjugovanými imaginárnými body; konstrukce reciproká.*)

Buďte a, b, c dané reálné body, a buďte dva imaginárné body r, s dány jakožto samodružné body elliptické involuce na přímce T; involuce ta jest ovšem vytčena dvěma páry bodovými, jež se oddělují. *Každý pár této involuce jest párem sdružených polů vzhledem ke kuželosečce, body r, s procházející.*

Označme p průsečík přímky $\overline{ab}$ s T, a p' bod jemu involucí přidružený; dále p'' bod harmonický k p vzhledem k a, b. Jak p', tak p'' jsou sdruženy s p a tedy $\overline{p'p''}$ polárou P bodu p vzhledem k žádané kuželosečce Σ. Spojivše p s c, nalezneme druhý společný bod c' této spojnice se Σ, uvážíme-li, že c, c' oddělují harmonicky pól p od poláry P. Obdobně sestrojíme polára Q průsečíku q přímek ac, T, a pomocí její další bod b' kuželosečky Σ položený na přímce $\overline{qb}$. Znajíce pět reálných bodů a, b, c, b', c' čáry Σ, strojíme tuto čáru dle věty Pascalovy.

Při reciproké úloze jsou dány tři tečny A, B, C čáry Σ a dvě imaginárné tečny její jakožto samodružné paprsky elliptické involuce paprskové o vrcholu t. *Každý pár této involuce jest párem sdružených polár vzhledem ke kuželosečce, dotýkající*

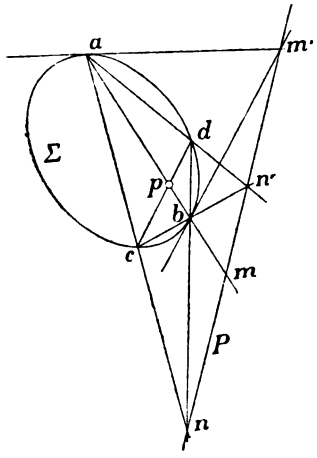
*) Sr. *F. Spath*, Lineale Construction von Kegelschnitten aus theilweise imaginären Elementen, Monatshefte f. Math. u. Physik, t. I; *F. Ruth*, Beitrag zur Construction der Kegelschnitte aus imag. Elementen, tamže, t. III; *F Machovec*, Zur lin. Construction von Kegelschnitten aus theilweise imag. Elementen, tamže t. IV.

se daných imnginárných tečen. Spojivše bod (AB) s bodem t paprskem P, nalezneme k tomuto snadno dva sdružené paprsky vzhledem k Σ: jeden P' jest danou involucí paprsku P přiřaděn a druhý P'' jest harmonický k P vzhledem k tečnám A, B; průsečík $(P'P'')$ jest pólem p přímky P. Spojnice bodu p s bodem (PC) jest s P sdružena, a tedy oddělují obě přímky harmonicky tečny C, C', tímto bodem procházející, čímž plyne tečna C'. Zcela obdobně sestrojíme pól q spojnice Q bodu (AC) s bodem t, a pomocí jeho druhou tečnu B' bodem (QB) procházející. Znajíce pět tečen A, B, C, B', C', strojíme další tečny větou Brianchonovou.

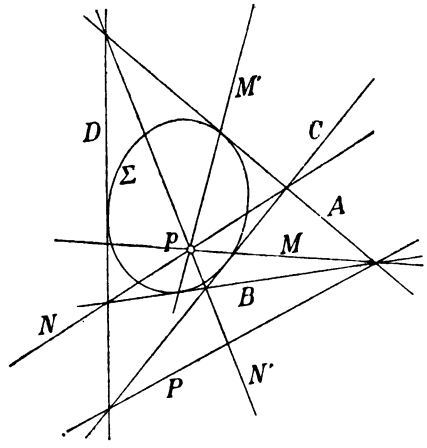
73. Strojení kuželosečky dané dvěma konjugovanými imaginárnými body s tečnami a dalším bodem neb tečnou.

Na poláře P vnitřního bodu p indukuje kuželosečka elliptickou involuci sdružených pólů, jež se z p promítá elliptickou involucí sdružených polár; samodružné body involuce na P jsou imaginárné průsečíky této přímky s kuželosečkou a jich průměty z p jsou samodružné paprsky involuce druhé a zároveň imaginárné tečny vedené bodem p.

Obr. 85.



Obr. 86.



Dána-li polára P bodu p a involuce elliptická na P indukovaná, jest to tolik, jako když dány jsou dva imaginárné body s jich imaginárnými tečnami; dalším bodem neb další tečnou jest tedy kuželosečka stanovena.

Buď nejprve dán další bod a (obr. 85.). Spojnice $\overline{pa}$ protniž

P v bodě m a buď m' bod přidružený danou involucí na P; pak jsou též $\overline{pm}$, $\overline{pm'}$ sdružené přímky a tedy pól přímky $\overline{pm}$ na $\overline{pm'}$, a ovšem také na P t. j. pólem tím jest bod m'. Jest tedy $\overline{am'}$ tečna hledané kuželosečky Σ v bodě a.

Pól p s polárou P podává na $\overline{ap}$ druhý bod b kuželosečky jakožto harmonický k a vzhledem k bodům p, m; spojnice $\overline{m'b}$ jest ovšem tečnou v b.

Promítneme-li libovolný pár n, n' dané involuce na P z bodů a, b, jež jsou s pólem p v jedné přímce, protnou se promítající paprsky v dalších bodech c, d kuželosečky Σ (čl. 66.). Znajíce body a, b s tečnami a další bod c, strojíme další body čáry Σ třeba větou Pascalovou.

Konstrukce ovšem platí i v případě, kdy involuce daná na P jest hyperbolickou, tedy pól p vnějším bodem; jí jsou dány reálné samodružné body r, s, jakožto body kuželosečky Σ a přímky $\overline{pr}$, $\overline{ps}$ jakožto její tečny, a mimo to bod a. Sestrojivše r, s, můžeme pak čáru dle věty Pascalovy strojiti; předchozí konstrukce ale i v tomto případě jest se stanoviska theorie dokonalejší, jelikož ji lze provésti pomocí pouhého pravítka.

Budiž za druhé mimo pól p, poláru P a elliptickou involuci, na ní indukovanou, ještě dána tečna A čáry Σ (obr. 86.).

Bod (PA) spojen s p podává přímku M, k níž involucí paprskovou danou v bodě p (jež jest průmětem involuce bodové, dané na poláře P) budiž přiřaděn paprsek M'; pak jsou též body (PM), (PM') sdruženy a tedy prochází polára bodu (PM) bodem (PM') a ovšem též bodem p, t. j. polára ta jest přímka M'. Její průsečík s A jest tudíž dotyčný bod tečny A.

Pól p s polárou P podává druhou tečnu B bodem (PA) procházející jakožto harmonický paprsek ku A vzhledem k P, M; bod $(M'B)$ jest ovšem dotyčný bod této tečny. Protneme-li libovolný pár N, N' involuce dané na bodě p dvěma tečnami A, B, jež se s polárou P sbíhají v jednom bodě, jsou spojnice průsečíků dvě další tečny C, D kuželosečky Σ (čl. 66.), tak že nyní známe tečny A, B s dotyčnými body (AM'), (BM'), a další dvě tečny C, D kuželosečky Σ.

Konstrukce potrvá ovšem v platnosti, kdy dané involuce jsou hyperbolické, a kdy tedy vlastně jsou dány dvě reálné tečny s dotyčnými body a další tečna A čáry Σ; ovšem vymáhá sestrojení reálných tečen, involucí daných, použití kružnice, kdežto provedená konstrukce jest lineárná.

74. Strojení kuželosečky, dané dvěma páry imaginárných bodů neb tečen a dalším bodem neb tečnou; aneb dané dvěma póly s polárami a dalším bodem neb tečnou.

Jde tedy nejprve o sestrojení kuželosečky Σ, jež indukuje na přímce T danou elliptickou involuci, na přímce U též danou elliptickou involuci a jež prochází daným bodem a, který ovšem nesmí býti ani na T, ani na U.

Společný bod m přímek T, U jest vnějším bodem, poněvadž jím procházejí tyto nesečny; jeho polára M protne tedy kuželosečku Σ ve dvou reálných bodech b, c, jež snadno nalezneme touto úvahou.

Přihlédneme-li k vepsanému trojúhelníku abc a k tomu, že přímka T procházejíc pólem m strany $\overline{bc}$ jest s touto stranou sdružena, soudíme dle poslední věty čl. 71.. že strany $\overline{ab}$, $\overline{ac}$ protínají T ve dvou sdružených bodech, t. j. v páru bodovém involuce, dané na T. Obdobně soudíme, že tytéž přímky $\overline{ab}$, $\overline{ac}$ protínají přímku U v páru bodovém involuce, dané na U. Jsou tedy přímky $\overline{ab}$, $\overline{ac}$ párem společným obou involucí paprskových, jimiž se z bodu a promítají obě bodové involuce, dané na T a na U; poněvadž tyto a tedy také paprskové involuce jsou obě elliptické, jest jich společný pár reálný a lze jej pomocí kružnice vrcholem a vedené snadno sestrojiti dle čl. 45. Tento paprskový pár protne poláru M bodu m v bodech b, c kuželosečky Σ, již lze nyní větou Pascalovou dále strojiti; známe totiž tři body její a, b, c a tečny $\overline{bm}$, $\overline{cm}$ v posledních dvou.

Polára M bodu m plyne ihned, uvážíme-li, že bod m' přidružený bodu m involucí na T, a bod m'' přidružený témuž bodu involucí danou na U jsou body sdružené ku m vzhledem k Σ, a že tedy jsou oba na poláře M.

Je-li jen jedna z daných involucí elliptickou a druhá hyperbolickou, jest bod m patrně vnější, a mají soumístné involuce též společný reálný pár (čl. 45.), pročež konstrukci lze též provésti; tím sestrojena vlastně kuželosečka, jdoucí dvěma imaginárnými a třemi reálnými body, totiž bodem a a samodružnými body dané hyperbolické involuce. Jsou-li obě dané involuce hyperbolickými, může bod m ležící na dvou sečnách býti vnějším, ale nemusí jím býti, a soumístné hyperbolické involuce mohou dle čl. 45. míti společný reálný pár, ale nemusí jej míti; v případě tom jde ostatně o strojení kuželosečky,

dané pěti reálnými body, totiž bodem a a samodružnými body daných hyperbolických involucí.

K úkolu právě řešenému reciproký požaduje konstrukci kuželosečky Σ dané dvěma páry imaginárných tečen a jednou reálnou tečnou A, t. j. kuželosečky indukující v daných bodech t, u dvě dané elliptické involuce a dotýkající se dané přímky A.

Řešení plyne způsobem reciprokým k předchozímu a jest toto:

Protněme dané involuce přímkou A ve dvou soumístných elliptických involucích bodových a stanovme jich společný pár r, s; označíme-li sečnu $\overline{tu}$ literou M, a pól této přímky m, jsou $\overline{mr}$, $\overline{ms}$ tečny čáry Σ, a jich průsečíky s M ovšem jich dotyčné body. Pól m přímky M jest na přímkách sdružených s M; a dvě takové přímky M' a M'' jsou paprsky sdružené s M v daných elliptických involucích. — Znajíce nyní dvě tečny s dotyčnými body a tečnu A, strojíme Σ dle věty Brianchonovy.

V příčině strojení kuželosečky dané dvěma póly s polárami a bodem neb tečnou, buďte nejprve dány póly p, q s polárami P, Q a bod a kuželosečky. Uvažme, že polára bodu $m \equiv (PQ)$ jest přímka $M = \overline{pq}$. Protne-li tato přímku P v bodě p', a Q v bodě q', jsou p, p' sdruženy, a taktéž q, q' sdruženy; známe tedy pól m s polárou M, involuci sdružených polů p, p'; q, q' na M a jeden bod a, čímž úkol převeden na úkol řešený v čl. 73.

Jsou-li za druhé dány póly p, q s polárami P, Q a tečna A kuželosečky, jest přímka $M \equiv \overline{pq}$ opět polárou bodu $m \equiv (PQ)$, a opět známe involuci p, p'; q, q' indukovanou na poláře M, čímž převeden úkol na onen, jenž řešen v čl. 73. na druhém místě.

75. Involuce adjungovaná dvěma soumístným projektivným útvarům. *)

Stanoviti imaginárné samodružné elementy dvou soumístných projektivných útvarů znamená *stanoviti involuci, jež má tytéž elementy samodružné* (čl. 70.); *involuce ta sluje adjungovanou daným projektivným útvarům, nechť jsou samodružné body reálné neb imaginárné.*

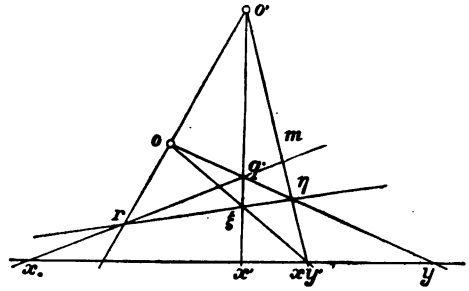
Dány-li na př. dvě soumístné řady projektivné $abc\ldots \pi$ $a'b'c'\ldots$,

*) Einleitung in die projectivische Geometrie der Ebene. Nach den Vorträgen des Herrn *C. Küpper* bearbeitet von Dr. *K. Bobek*, Kap. IV, § 2.

na přímce P, v nichž přísluší libovolnému bodu $x \equiv y'$ resp. body x', y, přiřaduje adjungovaná involuce bodu x bod x_0 harmonický k němu vzhledem k x', y.

Promítněme (obr. 87.) dané řady ze dvou libovolných bodů o, o' dvěma projektivnými svazky $o(abc..)$ π $o'(a'b'c'..)$, jichž sdružené paprsky se ovšem protínají v bodech α, β, γ,.. kuželosečky Σ, procházející vrcholy o, o'. Paprsky $\overline{ox}$, $\overline{o'x'}$ se protínají v bodě ξ, paprsky $\overline{oy}$, $\overline{o'y'}$ v bodě η kuželosečky Σ.

Obr. 87.



Samodružné body daných řad jsou (čl. 59.) průsečíky kuželosečky s přímkou P; involuce sdružených pólů na P majíc tytéž body za samodružné jest adjungovanou involucí.

Jeden diagonálný roh vepsaného čtyrrohu $oo'\xi\eta$ jest x, další dva buďte $q \equiv (\overline{o\eta}\ \overline{o'\xi})$ a $r \equiv (\overline{oo'}\ \overline{\xi\eta})$; diagonálná strana $\overline{qr}$ jest polárou diagonálného rohu x, a protne tedy P v bodě x_0 sdruženém, tak že xx_0 jest párem involuce adjungované. Avšak body $x\, m\, \eta\, o'$ jsou průsečíky přímky $\overline{o'x}$ se stranami a diagonálnými stranami onoho úplného čtyrrohu, a tedy jsou to čtyři body harmonické; jsou tedy také body $x\, x_0\, y\, x'$, do nichž se z bodu q promítají, harmonickými, jak bylo dokázati.

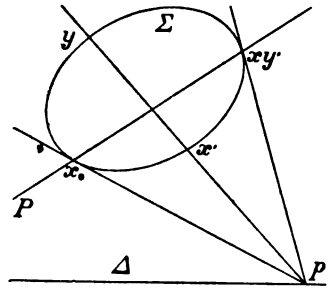
Tím řešen též úkol: *Stanoviti průsečíky přímky s kuželosečkou, danou pěti body*, i pro případ, že jsou průsečíky ty imaginárné. Jsou-li o, o', α, β, γ dané body a P daná přímka, promítněme α, β, γ z bodů o, o' na P resp. do bodů a, b, c a a', b', c' a vytkněme si dva páry x, x_0; z, z_0 involuce adjungované k řadám $abc..$ π $a'b'c'...$ Páry x, x_0; z, z_0 stanoví hledané průsečíky jakožto samodružné body involuce x, x_0; z, z_0.

Je-li kuželosečka dána body též imaginárnými, sjednáme si dle předchozích článků nejprve pět reálných bodů její a řešíme úkol jakož udáno.

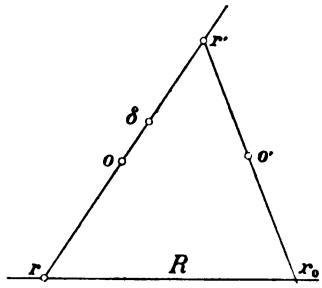
Obdobně nalezneme involuci adjungovanou dvěma soumístným projektivným svazkům $ABC..$ π $A'B'C'..$; sestrojivše X_0 harmonicky k libovolnému paprsku X svazku vzhledem k paprskům X', Y jemu příslušným, jest X, X_0 párem adjungované involuce, a dva takové páry ji stanoví.

Tím řešen reciproký úkol, *stanoviti tečny jdoucí bodem ke kuželosečce, dané pěti tečnami*, i pro případ, kdy hledané tečny jsou imaginárné. Jsou-li ω, ω', α, β, γ dané tečny a p daný bod, protněme tečny ω, ω' přímkami α, β, γ v bodech, jež promítneme z p resp. paprsky A, B, C a A', B', C', a vytkněme dva páry X, X_0; Z, Z_0 involuce adjungované ke svazkům ABC'.. π $A'B'C'$... Páry X, X_0; Z, Z_0 stanoví hledané tečny jakožto samodružné elementy involuce X, X_0; Z, Z_0.

Obr. 88.



Obr. 89.



Dány-li na kuželosečce Σ dvě projektivné křivé řady, jsou průsečíky jich direkční osy Δ se Σ samodružné body řad; *adjungovaná involuce, majíc tytéž samodružné body, jest tedy involuce bodová, kterou indukuje Δ na Σ.* To lze i přímo takto dokázati (obr. 88.). Jsou-li x, x' dva sdružené body daných řad, protíná se obecně $\overline{xy'}$ s $\overline{x'y}$ na Δ; učinivše $y' \equiv x$, jest $\overline{xy'}$ tečnou v bodě x, a ta se tedy protíná s $\overline{x'y}$ na Δ v jistém bodě p. Polára P bodu p prochází bodem x a protne kuželosečku ještě v jednom bodě x_0, harmonickém k x vzhledem ku x', y; jsou totiž x, x_0 dvojné body involuce na Σ o středu p, a x', y jest jedním párem jejím. Z harmoničnosti bodů $x x_0 x' y$ soudíme dle hořejší věty, že xx_0 jest párem adjungované involuce, a jelikož se tečny v sdružených bodech x, x_0 protínají na Δ, jest tato přímka polárou této involuce, jak bylo dokázati.

Reciprokým způsobem ovšem platí, že adjungovaná involuce k dvěma projektivným svazkům na kuželosečce jest paprsková involuce, kterou indukuje na kuželosečce direkční střed daných křivých svazků.

76. Soumístné projektivné útvary o splývajících elementech samodružných.

Předchozí úvaha podává *lineárné* řešení úkolu:

Dány jsou dva soumístné projektivné útvary, na př. na přímce R dvě řady abc.. π a'b'c'.. třemi páry sdružených bodů; má se rozhodnouti, mají-li splývající samodružné elementy, a v případě že jest tomu tak, má se jich samodružný bod sestrojiti.

Aby samodružné elementy splynuly, jest nutné a stačí, aby adjungovaná involuce daných řad byla parabolickou. Sestrojme tedy dle věty v předešlém článku dokázané dva páry xx_0 a zz_0 adjungované involuce; splyne-li x_0 s bodem z_0, jest tato involuce parabolickou a x_0 jest jediný samodružný bod projektivných řad.

Řešení jiné, ač v podstatě totéž, obdržíme, promítneme-li dané řady (obr. 89.) *abc.. π a'b'c'..* z vrcholu *o* resp. *o'* dvěma projektivnými svazky, vytvořujícími tedy kuželosečku Σ. Samodružné body řad splývají, je-li R tečnou čáry Σ; je-li tomu tak a je-li x_0 dotyčný bod její, jsou dle čl. 52. paprsky R, $\overline{x_0\delta}$, $\overline{x_0 o}$, $\overline{x_0 o'}$ harmonické, značí-li δ direkční střed svazků $o(abc..)$ π $o'(a'b'c'..)$. Protneme-li tyto čtyři paprsky přímkou $\overline{o\delta}$ v bodech r, δ, o, r', jsou i tyto harmonické. K řešení problému stačí tedy sestrojiti direkční střed δ, pak bod r' harmonický k o vzhledem k r, δ, dále protnouti řadu R spojnicí $\overline{r'o'}$ v bodě x_0; je-li tento bod na kuželosečce, to jest jsou-li $\overline{ox_0}$, $\overline{o'x_0}$ dva sdružené paprsky projektivných svazků o, o', mají dané řady splývající samodružné body a sice v bodě x_0.

77. Involuce adjungovaná dvěma soumístným involucím.*)

Jsou-li dány dvě soumístné involuce, na př. bodové, přísluší libovolnému elementu x v první involuci bod x' a v druhé x''; proběhne-li x řadu, vytvoří x' a x'' ovšem dvě projektivné řady, a jich adjungovaná involuce sluje adjungovanou k daným dvěma involucím.

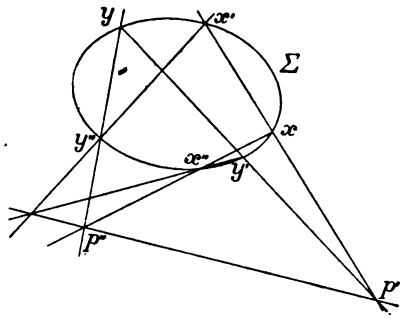
Povahu této adjungované involuce nejpohodlněji poznáme, jsou-li dané involuce na kuželosečce. Platí pak věta:

Adjungovaná involuce k dvěma bodovým involucím daným na téže kuželosečce o středech p' a p'' má spojnici $\overline{p'p''}$ za osu.

*) *C. Küpper* l. c.

Promítneme-li libovolný bod x kuželosečky Σ (obr. 90.) ze středů p' a p'' opět na Σ do bodů x', x'', jsou tyto sdružené body projektivných řad; obdobně podává jiný bod y dva sdružené body y', y''. Osa involuce adjungované k řadám $x'y' \dots \pi\, x''y'' \dots$ jest direkční osa těchto řad (čl. 75.) t. j. přímka, na níž se obecně $\overline{x'y''}$ a $\overline{x''y'}$ protínají. Stačí tedy dokázati, že bod $(\overline{x'y''}\ \overline{x''y})$ jest na $\overline{p'p''}$; to ale vychází z Pascalovy věty, přihlédneme-li k vepsanému šestiúhelníku $x'xx''y'yy''$.

Obr. 90.



Dle právě dokázané věty jest patrné, že k dvěma elliptickým involucím adjungovaná involuce jest vždy hyperbolickou, a že její samodružné elementy tvoří pár společný oběma daným involucím; že adjungovaná k dvěma hyperbolickým má dvojné elementy každé této involuce za pár, neboť tečny vedené bodem p' neb p'' osy involuce se dotýkají ve dvou sdružených bodech adjungované; a že adjungovaná může býti ellipticou, hyperbolickou anebo parabolickou, a t. d.

78. Sestrojení průsečíku konjugovaných imaginárných přímek a spojnice konjugovaných imaginárných bodů.

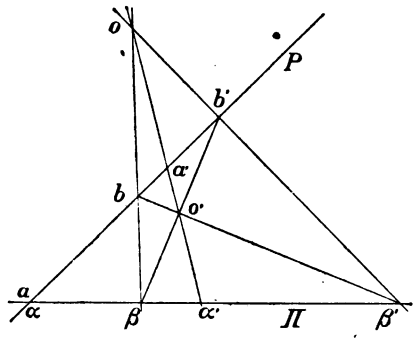
Imaginárné konjugované body r, s buďte dány jakožto samodružné body elliptické involuce na přímce P, a druhý pár imaginárných bodů ϱ, σ elliptickou involucí na přímce Π. Přímky $\overline{r\varrho}$, $\overline{s\sigma}$, spojujíce konjugované body jsou konjugovány, a jich průsečík jest reálný; z něho se promítají body r, s do bodů ϱ, σ a tedy jedna involuce do druhé. Taktéž $\overline{r\sigma}$, $\overline{s\varrho}$ jsou konjugované imaginárné přímky o reálném průsečíku, z něhož se jedna involuce promítá do druhé. Sestrojíme-li k společnému bodu $a \equiv \alpha$ přímek P a Π (obr. 91.) involucemi přidružené body a' resp. α', musí, poněvadž se a promítá do α, též a' se promítnouti do α', t. j. spojnice $\overline{a'\alpha'}$ obsahuje střed promítání.

Pár b, b', jenž náleží elliptické involuci na P a jenž odděluje harmonicky a, a', dovedeme dle čl. 45. sestrojiti; on se promítá do páru β, β' involuce na Π oddělujícího harmonicky α, α'. Sestrojivše tedy též β, β' dle cit. článku, jsou buď $\overline{b\beta}$, $\overline{b'\beta'}$ pro-

mítající paprsky a tudy $o \equiv (\overline{b\beta}\ \overline{b'\beta'})$ střed promítání, aneb jsou $\overline{b\beta'}$, $\overline{b'\beta}$ promítající paprsky a jich průsečík $o' \equiv (\overline{b\beta'}\ \overline{b'\beta})$ středem promítání. Jsou tedy o, o' průsečíky $(\overline{r\varrho}, \overline{s\sigma})$ a $(\overline{r\sigma}, \overline{s\varrho})$ imaginárných přímek.

Jest to přímo patrné, že jak z o tak z o' se jedna involuce promítá do druhé, poněvadž se dva páry aa', bb' promítají do dvou párů $\alpha\alpha$, $\beta\beta'$.

Obr. 91.



Promítneme-li dané involuce z o a o' dvěma paprskovými involucemi, stanoví tyto vždy dvě z imaginárných spojnic bodů r, s, ϱ, σ, tak že řešený úkol lze také takto formulovati:

Dány-li jsou dva páry konjugovaných imaginárných bodů dvěma elliptickými involucemi na dvou přímkách, stanoviti jich další čtyři imaginárné spojnice.

Obdobně řešíme reciproký úkol, *stanoviti další čtyři imaginárné průsečíky dvou párů imaginárných přímek, daných jakožto samodružné paprsky dvou elliptických involucí paprskových.*

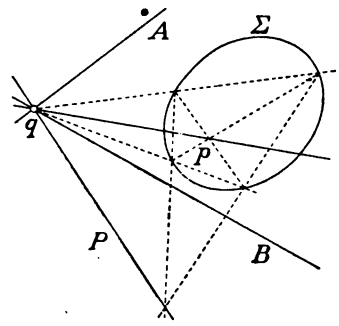
Jsou-li p, p_0 vrcholy daných paprskových involucí, stanovíme k společnému paprsku $A \equiv pp_0$ paprsky A' resp. A'_0 involucemi přidružené; jich společným bodem procházejí pak reálné přímky O, O', obsahující po dvou hledané imaginárné průsečíky. Ustanovíme-li pár BB' první involuce, harmonický k AA', a pár $B_0B'_0$ druhé involuce, harmonický k $A_0A'_0$, jsou $(BB_0)\ (B'B'_0)$ a $(BB'_0)\ (B'B_0)$ hledané přímky O, O'; každou z nich protnou dané involuce v téže involuci, jejíž samodružné body jsou hledané průsečíky.

Dána kuželosečka Σ a nesečna A (obr. 92.), *jichž imaginárné průsečíky a, a' nechť se promítají z daného bodu p na touž čáru do dvou bodů b, b'; tyto konjugované imaginárné body nechť se stanoví t. j. nechť se stanoví jich spojnice $\overline{bb'} \equiv B$ a involuce o dvojných bodech b, b'.*

Imaginárné body $aa'bb'$ tvoří vepsaný úplný čtyrroh, jehož jednou stranou jest $A \equiv \overline{aa'}$, jedním diagonálným rohem $p \equiv (\overline{ab}\ \overline{a'b'})$ a protější diagonálnou stranou polára P bodu p, kterou sestrojíme. Průsečík $q \equiv (AP)$ jest tedy druhým diagonálným rohem, a jím prochází hledaná strana $B \equiv \overline{bb'}$ jsouc harmonická

ké straně A vzhledem k diagonálným stranám P, $\overline{pq}$, čímž B nalezena; polára bodu q jest arci třetí diagonálná strana Q řečeného úplného čtyrrohu. Žádaná involuce na B jest ovšem involuce sdružených pólů.

Obr. 92.



Úkol reciproký i s řešením zůstavujeme čtenáři.

Dány dva konjugované imaginárné body r, s elliptickou involucí na přímce A; nechť se stanoví jich průměty r', s' z libovolného bodu o kuželosečky Σ na tuto čáru, t. j. nechť se stanoví spojnice $\overline{r's'} \equiv B$ těchto dvou konjugovaných bodů.

Involuce na A se promítá z daného bodu o involucí paprskovou a tuto protne Σ v křivé involuci bodové, jejíž samodružné body jsou průměty r', s' samodružných bodů r, s; hledaná spojnice $\overline{r's'}$ jest tedy osa involuce na Σ, do níž se daná involuce z bodu o promítá. Body r', s' jsou na této ose ovšem stanoveny involucí sdružených pólů.

Úkol reciproký nechť řeší čtenář sám.

Dána kuželosečka Σ a dva konjugované imaginárné body i, j jakožto samodružné body elliptické involuce I na přímce O; nechť se stanoví další čtyři průsečné body imaginárných tečen, vedených body i, j ke kuželosečce.

Imaginárné tečny bodem i procházející označme F, G, tečny bodem konjugovaným j procházející F', G'; tyto jsou pak k oněm konjugovány, řekněme F' k F a G' ku G. Hledané průsečíky jsou (FF'), (GG'), (FG'), (GF'); první dva jsou reálné, druhé dva konjugované, a jsou tedy první dva i druhé dva na reálné přímce. Tyto přímky P, Q tvoří s přímkou O diagonálný trojstran opsaného úplného čtyrstranu $FGF'G'$; jest tedy OPQ polárným trojstranem, a procházejí tudíž P, Q pólem o přímky O. Z úplného čtyrstranu zároveň patrné, že póly p, q přímek P, Q oddělují harmonicky i, j, t. j. že p, q jest párem involuce I, a ovšem zároveň párem involuce sdružených pólů na O; tím p, q nalezen jakožto společný reálný pár (čl. 45.) elliptické involuce I a involuce indukované danou kuželosečkou na O, a nalezeny též spojnice $\overline{op} \equiv Q$, $\overline{oq} \equiv P$.

Body hledanými (FF'), (GG'), (FG'), (GF') vedené tečny procházejí body i, j, a jest tedy involuce v těchto bodech in-

dukovaná totožna s involucí, jíž se promítá involuce I z těchto bodů. Z libovolného bodu jak přímky P, tak Q se promítají body p, q dvěma polárně sdruženými paprsky, a zároveň jsou to dva paprsky, jež promítají pár pq involuce I. Je-li tedy m, m' libovolný jiný pár involuce I a promítne-li se týž z bodu f přímky P neb Q dvěma polárně sdruženými paprsky, má involuce v f indukovaná *dva* společné páry s involucí promítající I, t. j. f jest pak jedním z čtyř hledaných bodů. Abychom bod f nalezli, přiřaďme libovolnému paprsku svazku m ve svazku m' paprsek polárně sdružený; tím vznikají (čl. 68.) dva projektivné svazky, jež protnou jak P tak Q ve dvou soumístných projektivných řadách; samodružné body těchto řad jsou patrně hledané body a vycházejí na jedné přímce jako reálné, na druhé jako konjugované imaginárné body.

Úkol reciproký zůstavujeme opět čtenáři.

Kapitola IX.

Svazek a řada kuželoseček. Věta Desargues-ova a její zobecnění. Strojení kuželoseček z pěti elementů. Polárná vlastnost svazku a řady kuželoseček.

79. Svazek a řada kuželoseček.

Pěti body prochází jediná kuželosečka, a pěti přímek se dotýká též jediná; dvě kuželosečky nemohou tedy míti více společných bodů a společných tečen než čtyři.

Svazkem kuželoseček nazýváme souhrn všech kuželoseček, vedených čtyřmi danými body a, b, c, d, jež slují základnými body č. základem (basis) svazku.

Pevná přímka P, vedená základným bodem a, protne čáry Σ, Σ', Σ'' ... svazku mimo a ještě resp. v bodech x, x', x'' ..; čára Σ svazku jest stanovena, vytkneme-li bod x řady P, jímž prochází, aneb tečnu její A

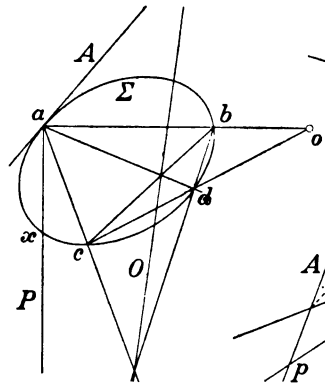
Řadou kuželoseček nazýváme souhrn všech kuželoseček, dotýkajících se čtyř daných přímek A, B, C, D, jež slují základnými přímkami č. základem (basis) řady.

Pevným bodem p zvoleným na základné přímce A procházejí k čarám $\Sigma, \Sigma', \Sigma''$,.. řady mimo A ještě resp. tečny X, X', X'',..; čára Σ řady jest stanovena, vytkneme-li paprsek X svazku p, jehož se dotýká,

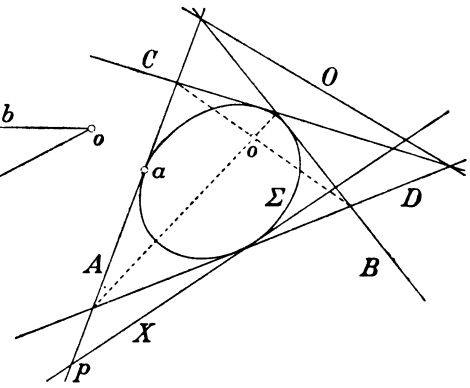
v bodě a. Svazek tečen $AA'A''..$ čar $\Sigma, \Sigma', \Sigma''..$ jest projektivný s řadou bodů $x\ x'\ x''..$, a též projektivný se svazkem tečen $BB'B''..$, sestrojených v jiném základním bodě b, a tedy také s řadou bodovou, vznikající na pevné přímce bodem b vedené.

aneb dotyčný její bod a s tečnou A. Svazek bodů dotyčných $a, a', a'',..$ čar $\Sigma, \Sigma', \Sigma'',..$ jest projektivný se svazkem paprsků $X, X', X'',..$ a též projektivný s řadou bodů dotyčných $b, b', b'',..$ se základnou přímkou B, a tedy také projektivný se svazkem paprskovým vznikajícím v pevném bodě přímky B.

Obr. 93.



Obr. 94.



Svazek kuželoseček $\Sigma\Sigma'\Sigma''..$ nazýváme projektivným s nějakým útvarem U, je-li svazek příslušných tečen $AA'A''..$ aneb řada bodů $xx'x''..$ projektivná s útvarem U.

Označíme-li o (obr. 93.) průsečík přímek $\overline{ab}$, $\overline{cd}$, tedy diagonálný roh úplného čtyrrohu $abcd$ všem kuželosečkám svazku vepsaného, a O protější diagonálnou stranu, jest O pólarou bodu o vzhledem ke každé čáře svazku; tečny A, B čáry Σ

Řadu kuželoseček $\Sigma\Sigma'\Sigma''..$ nazýváme projektivnou s nějakým útvarem U, je-li řada příslušných bodů dotyčných $aa'a''..$, aneb svazek tečen $XX'X''..$ projektivný s útvarem U.

Označíme-li O (obr. 94.) spojnici bodů (AB), (CD), tedy diagonálnou stranu úplného čtyrstranu $ABCD$ opsaného všem čarám řady, a o protější diagonálný roh, jest o pólem přímky O vzhledem ke každé čáře řady; dotyčné body a, b

v bodech a, b sestrojené, se tedy protínají (čl. 65.) na poláře O t. j. svazek tečen $AA'A''..$ jest perspektivný se svazkem tečen $BB'B''..$

Promítneme-li čtyři body a, c, d, x kuželosečky Σ z bodů a, b obdržíme dva čtyrpaprskové svazky o stejném dvojpoměru:

$$a\,(acdx) = b\,(acdx).$$

Poněvadž spojnice soumezných bodů $\overline{aa}$ jest tečna A, a přímky $\overline{ac}$, $\overline{ad}$, $\overline{ax}$, $\overline{ba}$, $\overline{bc}$, $\overline{bd}$ jsou pevny, jest tato rovnost obapolně lineárnou relací mezi dělícími poměry paprsků A a $\overline{bx}$, pročež svazek tečen A jest projektivný se svazkem paprsků $\overline{bx}$, a tedy také s řadou bodů x na přímce P, jak bylo dokázati.

Dvojpoměrem čtyř kuželoseček Σ, Σ', Σ'', Σ''', svazku nazýváme dvojpoměr $(AA'A''A''')$ jich tečen v základném bodě sestrojených, aneb i dvojpoměr $(xx'x''x''')$ bodů, jež stanoví na přímce základným bodem vedené.

Ve svazku kuželoseček se vyskytují tři zvrhlé čáry; každá jest soustavou dvou protějších stran základného čtyrrohu $abcd$: jsou to čáry $\overline{ab}$, $\overline{cd}$; $\overline{ac}$, $\overline{bd}$; $\overline{ad}$, $\overline{bc}$. Jest totiž patrno, že každá z těchto tří zvrhlých čar prochází všemi čtyřmi základnými body svazku, a že mimo ně jiči̇ry Σ s přímkami A, B mají tedy spojnici procházející bodem o (čl. 65.), t. j. řada dotyčných bodů $aa'a''..$ jest perspektivná s řadou dotyčných bodů $bb'b''..$

Protneme-li čtyři tečny A, C, D, X kuželosečky Σ tečnami A, B, obdržíme dvě čtyrbodové řady o stejném dvojpoměru:

$$A\,(ACDX) = B\,(ACDX).$$

Poněvadž průsečík soumezných tečen (AA) jest dotyčný bod a, a průsečíky (AC), (AD), (AX), (BA), (BC), (BD) jsou pevny, jest tato rovnost relací obapolně lineárnou mezi dělícími poměry bodu a a (BX), pročež řada dotyčných bodů a projektivná s řadou bodů (BX), a tedy také se svazkem paprsků X o vrcholu p, jak bylo dokázati.

Dvojpoměrem čtyř kuželoseček Σ, Σ', Σ'', Σ''' řady nazýváme dvojpoměr $(aa'a''a''')$ jich dotyčných bodů se základnou přímkou, aneb i dvojpoměr $(XX'X''X''')$ tečen vedených k nim bodem na základné přímce voleným.

V řadě kuželoseček se vyskytují tři zvrhlé čáry: každá jest soustavou dvou protějších rohů základného čtyrstranu $ABCD$; jsou to čáry (AB), (CD); (AC), (BD); (AD), (BC). Jest totiž jasné, že každá z těchto tří zvrhlých čar má všecky čtyři základné přímky za tečny

ných zvrhlých čar není, jež by toto činily. | a že mimo ně jiných zvrhlých čar o této vlastnosti není.

Základné body svazku kuželoseček mohou býti též imaginárné. Vytkneme-li na př. na dané kuželosečce Σ nesečnou P dva konjugované imaginárné body a, b, a nesečnou Q další dva konjugované imaginárné body c, d, tvoří všecky kuželosečky Σ, Σ', Σ'',.. čtyřmi imaginárnými body a, b, c, d procházející, svazek kuželoseček; každá čára svazku jest dalším bodem stanovena, a lze ji dle čl. 74. sestrojiti.

Vytkneme-li na př. dva konjugované imaginárné body a, b jakožto samodružné body elliptické involuce, a další dva reálné body c, d, lze kuželosečku procházející těmito čtyřmi body a, b, c, d a bodem pátým x dle čl. 72. sestrojiti; souhrn všech těchto čar jest svazek kuželoseček o dvou konjugovaných imaginárných základných bodech a, b a dvou reálných c, d. Hořejší věty v příčině svazku tečen v základním bodě a řady bodů na přímce základným bodem vedené ovšem potrvají v platnosti.

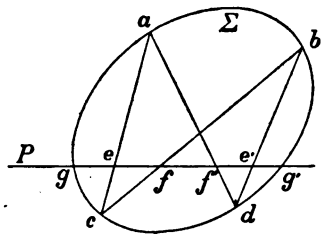
Obdobně lze strojiti na základě citovaných článků kuželosečky řady, dané imaginárnými základnými přímkami.

80. Věta Desargues-ova a věta reciproká.

*Průsečné body libovolné přímky s kuželosečkami svazku jsou páry involuce.**) | *Tečny vedené libovolným bodem ke kuželosečkám řady jsou páry involuce.*

Chtíce dokázati větu po levé straně — větu Desarguesovu — označme (obr. 95.) základné body svazku a, b, c, d, libovolnou kuželosečku svazku Σ a její průsečíky s danou přímkou P literami g, g'. Promítneme-li čtyři body c, d, g, g' kuželosečky Σ z bodů a, b téže čáry, obdržíme dva čtyrpaprskové svazky o stejných dvojpoměrech

Obr. 95.



$$a\,(cdgg') = b\,(cdgg').$$

Protneme-li tyto svazky přímkou P, obdržíme dvakráte čtyři body o týchž dvojpoměrech

$$(efgg') = (f'e'gg').$$

*) Oeuvres de Desargues, par M. Poudra, t. I., pag. 171.

Vyměníme-li v posledním dvojpoměru navzájem první dva body a též poslední dva, obdržíme (čl. 8.) týž dvojpoměr a tedy rovnost $(efgg) = (e'f'g'g)$,
která ukazuje, že g, g' jest párem involuce stanovené páry e, e'; f, f', čímž věta dokázána. Páry e, e' a f, f' vznikají jakožto průsečíky přímky P s dvěma zvrhlými čarami svazku; třetí zvrhlá čára skládající se z přímek $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ protne P v páru téže involuce, jakož v úplném čtyrrohu $abcd$ (čl. 34.) patrno.

Větu na pravé straně lze zcela obdobně dokázati, což zůstavujeme čtenáři.

Kuželosečky, vedené třemi body a, b, c a páry involuce na přímce P, procházejí ještě čtvrtým bodem d, tvoříce svazek.

Kuželosečky, dotýkající se tří přímek A, B, C a párů paprskové involuce, dotýkají se ještě čtvrté přímky D, tvoříce řadu kuželoseček.

V příčině levé věty buďte g, g' a h, h' dva páry involuce dané na P a buďte Σ, Σ' kuželosečky vedené body a, b, c, g, g' resp. a, b, c, h, h'. Čáry ty mají ještě jeden společný bod d (čl. 83.). Svazek kuželoseček o základných bodech a, b, c, d stanoví na P involuci o párech g, g' a h, h', t. j. danou involuci, čímž věta dokázána. Obdobně lze větu na pravé straně dokázati.

Věta Desargues-ova podává ihned řešení úkolu, *sestrojiti kuželosečku procházející daným bodem x a čtyřmi průsečíky dvou kuželoseček Σ, Σ', daných dvakráte pěti body.*

Veďme bodem x libovolnou přímku P a stanovme její průsečíky g, g' se Σ jakožto dvojné body involuce I_1 (čl. 59. a 75.) a průsečíky h, h' se Σ' jakožto dvojné body druhé involuce I_2. Páry g, g' a h, h' stanoví třetí involuci I_3 a bod x' příslušný v této involuci bodu x jest dle věty Desargues-ovy druhý průsečík přímky P s hledanou kuželosečkou. Vedeme-li bodem x čtyři přímky P, obdržíme čtyři body x' hledané čáry, již ze známých pěti bodů sestrojíme. — Bod x' nejpohodlněji nalezneme, promítneme-li involuce I_1 a I_2 z libovolného bodu kružnice na tuto čáru, čímž obdržíme na kružnici dvě bodové involuce L_1, L_2, jichž středy nechť jsou s_1, s_2. Spojnice $\overline{s_1 s_2}$ jest patrně osou involuce L_3, do níž se promítá I_3 a tedy pól přímky $\overline{s_1 s_2}$ vzhledem ke kružnici jest středem involuce I_3, pomocí jehož sestrojíme k libovolnému bodu kružnice přidružený bod v této involuci; tím jest ovšem i sestrojen k libovolnému bodu přímky P bod jemu přidružený involucí I_3.

Jest patrno, že konstrukce bodu x' jest nezávislá na okol-

nosti, protínají-li se čáry Σ, Σ' v reálných bodech čili nic, *čímž získána konstrukce kuželosečky vedené daným bodem x a čtyřmi imaginárnými průsečíky dvou kuželoseček Σ, Σ', aneb dvěma reálnými a dvěma imaginárnými jich průsečíky.*

Větou reciprokou k Desargues-ově lze obdobně *sestrojiti kuželosečku, jež se dotýká dané přímky a zároveň společných čtyř tečen dvou kuželoseček, daných dvakráte pěti tečnami*, a konstrukce má platnost i v případu, kdy dvě ze společných tečen jsou imaginárné, aneb všecky čtyři; její provedení zůstavujeme čtenáři.

Čtyřmi body a, b, c, d procházejí dvě kuželosečky, dotýkající se dané přímky P; jich dotyčné body jsou samodružné body involuce stanovené na P svazkem o základu abcd.

Tím řešeny úkoly:

Sestrojiti kuželosečku, danou čtyřmi body a, b, c, d a jednou tečnou P.

Zvrhlá čára $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ protniž P v bodech m, m', zvrhlá čára $\overline{ac}$, $\overline{bd}$ v bodech n, n', a sestrojme samodružné body involuce m, m'; n, n', jež označíme r, s. Jsou-li tyto reálné, hoví dvě kuželosečky úkolu, jedna vedená pěti body a, b, c, d, r druhá body a, b, c, d, s.

Jsou-li r, s imaginárné, neexistuje reálná kuželosečka, hovící problému, poněvadž by pak reálnou přímku P protínala ve dvou splývajících imaginárných bodech $r \equiv r'$, resp. $s \equiv s'$.

Čtyř přímek A, B, C, D se dotýkají čtyři kuželosečky procházejíce daným bodem p; jich tečny v tomto bodu jsou samodružné paprsky involuce, stanovené v p řadou o základu ABCD.

Sestrojiti kuželosečku, danou čtyřmi tečnami A, B, C, D a jedním bodem p.

Zvrhlá čára (AB), (CD) měj tečny M, M' bodem p procházející, zvrhlá čára (AC), (BD) tečny N, N' tím bodem procházející. Sestrojme samodružné paprsky involuce M, M'; N, N', jež označíme R, S. Jsou-li tyto reálné, hoví úkolu dvě kuželosečky, jedna o pěti tečnách A, B, C, D, R, druhá A, B, C, D, S.

Jsou-li R, S imaginárné, neexistuje reálná kuželosečka, hovící problému, poněvadž by pak reálným bodem p k ní procházely dvě splývající imaginárné tečny $R \equiv R'$, resp. $S \equiv S'$.

Věta Desargues-ova vede ke konstrukci kuželosečky procházející čtyřmi body a, b, c, d a dotýkající se dané přímky P i v případě, kdy dané body jsou imaginárné, totiž dva a dva konjugované imaginárné body. Volíme-li na P libovolný bod

m, dovedeme dle čl. 74. sestrojiti další čtyři reálné body kuželosečky procházející body a, b, c, d, m, a tedy také její druhý průsečík m' s přímkou P, čímž máme jeden pár m, m' involuce stanovené na P svazkem kuželoseček o imaginárných bodech základných a, b, c, d. Stanovíme obdobně ještě jeden pár n, n' této involuce, a pak její samodružné body r, s; každým z nich prochází jedna z hledaných dvou kuželoseček, a strojí se v případu jich reálnosti opět dle methody čl. 74.

Obdobně lze řešiti, a to za pomoci čl. 72., úkol v případu, kdy dva z daných čtyř bodů a, b, c, d jsou konjugované imaginárné a dva reálné, a za pomoci týchž dvou článků úkoly reciproké, což však zůstavujeme čtenáři.

Na předchozí úkoly se snadno redukují i následující:

Sestrojiti kuželosečku procházející čtyřmi společnými body dvou kuželoseček, daných dvakráte pěti body, a dotýkající se dané přímky.

Sestrojiti kuželosečku dotýkající se čtyř společných tečen dvou kuželoseček, daných dvakráte pěti tečnami, procházející daným bodem.

Sestrojivše v levé úloze průsečíky, třeba imaginárné, daných dvou kuželoseček s danou přímkou, máme dva páry involuce, jejíž dvojné body jsou dotyčné body hledaných dvou čar s danou přímkou, čímž úkol redukován na předchozí; a obdobně pro úkol na pravé straně.

81. Speciálné případy.

Je-li v předposledních úkolech po levé straně přímka P v nekonečnu, máme řešení úkolu:

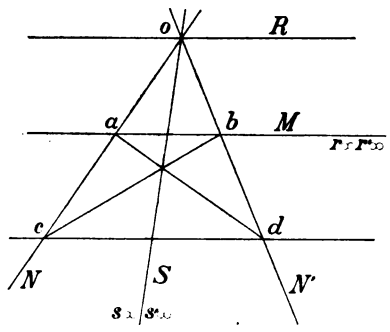
Čtyřmi danými body a, b, c, d vésti parabolu.

Abychom stanovili v tomto případě samodružné body involuce m, m'; n, n', jež jest na přímce P nekonečně vzdálené, promítněme involuci z libovolného bodu o involucí paprskovou M, M'; N, N' t. j. veďme tyto čtyři paprsky libovolným bodem o rovnoběžně s dvěma páry protějších stran úplného čtyrrohu $abcd$. Jsou-li R, S samodružné elementy involuce paprskové, jsou jich nekonečně vzdálené body r_∞, s_∞ dotyčné body hledaných dvou parabol s přímkou v nekonečnu, t. j. R a S jsou směry os obou parabol, hovících problému; ovšem jen v případě reálných paprsků R, S existují reálné paraboly hovící úkolu.

Jsou-li a, b, c, d vrcholy lichoběžníku, je-li tedy na př.

$\overline{ab}$ rovnoběžka k $\overline{cd}$, protnou tyto přímky P_∞ ve dvou splývajících bodech $r \equiv r'$, t. j. v jednom samodružném bodě involuce na P_∞. Druhý samodružný bod jest pak k němu harmonický vzhledem ke každému páru, tedy na př. vzhledem k n, n' (obr. 96.). Promítneme-li involuci z bodu o společného přímkám $\overline{ac}$, $\overline{bd}$, máme v obrazci vyznačenou konstrukci paprsku S harmonického k R vzhledem k N, N', a udávajícího směr osy jediné paraboly, jež možno opsati lichoběžníku; druhé řešení jest zvrhlá čára, skládající se z rovnoběžných přímek $\overline{ab}$, $\overline{cd}$.

Obr. 96.



Větou Desargues-ovou řešíme též úkol: *čtyřmi danými body a, b, c, d vésti hyperbolu, jejíž asymptoty uzavírají daný úhel* φ. Promítneme-li involuci, již stanoví kuželosečky vedené body a, b, c, d na nekonečně vzdálené přímce z libovolného bodu o involucí paprskovou, jde o stanovení onoho páru této involuce, jehož paprsky uzavírají daný úhel φ. Veďme bodem o kružnici a vytkněme střed δ bodové involuce, kterou involuce paprsková na kružnici stanoví. Otáčí-li se úhel φ kolem o, stanoví jeho ramena na kružnici stálý oblouk, příslušný středovému úhlu 2φ, a tětiva tohoto oblouku jest patrně stále tečnou soustředné kružnice. Vedeme-li k této bodem δ tečny, protne každá z nich první kružnici v páru bodové involuce, jím prochází pár paprskové involuce, uzavírající úhel φ. Je-li δ mimo druhou kružnici, obdržíme tím dvě, je-li na kružnici jedinou hyperbolu o úhlu asymptot φ; je-li uvnitř, není takové reálné hyperboly.

Je-li φ úhlem pravým, t. j. má-li se čtyřmi body vésti rovnoramenná hyperbola, tu nutno stanoviti pravoúhlý pár paprskové involuce; spojnice bodu δ se středem kružnice podává příslušný bodový pár na kružnici. *Prochází tedy čtyřmi body vždy rovnoramenná hyperbola*; aby procházely dvě, musí δ splynouti se středem kružnice, a pak jest každý pár involuce pravoúhlým, t. j. *pak jsou všecky kuželosečky svazku rovnoramenné hyperboly.* Ovšem musí také úběžné body zvrhlých čar býti v kolmých směrech, t. j. $\overline{ab} \perp \overline{cd}$, $\overline{ac} \perp \overline{bd}$, $\overline{ad} \perp \overline{bc}$ čili bod d musí býti průsečíkem výšek trojúhelníku abc; a to také stačí, neboť pak jsou patrně dva páry paprskové involuce pravoúhlé

a tedy všecky (čl. 36.). Z toho jde, že *čtyřmi průsečíky dvou rovnoramenných hyperbol vedená kuželosečka jest vždy rovnoramennou hyperbolou, a že tyto průsečíky mají takovou vzájemnou polohu, že každý jest společným bodem výšek v trojúhelníku ostatními třemi stanoveném, a naopak.*

Úkol právě řešený jest pouze speciálný případ tohoto: *čtyřmi body a, b, c, d vésti kuželosečku, která odděluje harmonicky dva dané body i, j,* t. j. vzhledem k níž *i, j* jsou sdruženými body. Průsečné body žádané kuželosečky s přímkou $\overline{ij}$ jsou oním bodovým párem, jenž náleží současně do involuce stanovené svazkem kuželoseček o základě *abcd* na přímce $\overline{ij}$ a do involuce o dvojných bodech *i, j*. Reciprokým způsobem by se stanovila *kuželosečka, dotýkající se čtyř daných přímek, a vzhledem k níž dvě další přímky jsou reciprokými polárami.*

82. Jiné odvození věty Desargues-ovy.

Kuželosečka Σ, vedená čtyřmi danými body a, b, c, d a pátým bodem e, protíná danou přímku P ve dvou bodech samodružných $r_0 \equiv r'$, $s_0 \equiv s'$ projektivných řad $c_0 d_0 e_0 \ldots \pi\, c'd'e' \ldots$, jež vznikají promítáním křivé řady na Σ z bodů a, b na přímce P (čl. 59.). Mění-li se bod e t. j. kuželosečka Σ svazku o základných bodech a, b, c, d, tu se mění pár sdružených bodů $e_0 e'$, avšak dva páry $c_0 c'$ a $d_0 d'$ jsou vždy tytéž; z toho ale snadno plyne, že samodružné body r_0, s_0 jsou páry involuce.

Stačí stanoviti samodružné body ty dle čl. 42., tedy sestrojiti kružnici dotýkající se přímky P, a body c_0, d_0, c', d' k ní tečny $\underline{C_0}$, $\underline{D_0}$, $\underline{C'}$, $\underline{D'}$; střed direkční δ se pak nalézá na spojnici $(\overline{C_0 D'})$ $(\overline{C' D_0})$, a jím procházejí samodružné tečny $R_0 \equiv R'$, $S_0 \equiv S'$ křivých svazků na kružnici vzniklých. Podvojné tečny R_0, S_0 protínajíce se na pevné přímce $(\overline{C_0 D'})$ $(\overline{C' D_0})$ tvoří páry tečnové involuce na kružnici (čl. 65.) a protnou tečnu P v párech r_0, s_0 bodové involuce, jakož tvrdí věta Desargues-ova. — Věta reciproká plyne obdobně.

83. Zobecnění věty Desargues-ovy.

Methoda předchozího článku vede k zobecnění věty Desargues-ovy, které vyvodíme tím, že přímku, protínající čáry svazku, nahradíme kuželosečkou, vedenou dvěma základnými body svazku.

Dle vzoru předchozího článku rozřešíme především úkoly:

Jsou dány dva společné body dvou kuželoseček, z nichž každá jest stanovena ještě třemi body; nechť se stanoví další dva společné jich body, reálné neb imaginárné.

Buďtež Σ kuželosečka, daná body o, o', a, b, c, a Π body o, o', g, h, k. Promítáme-li body a, b, c.. čáry Σ z bodů o, o', vznikají dva projektivné svazky, jež protnou čáru Π vrcholy o, o' procházející, ve dvou projektivných soumístných řadách $\alpha\beta\gamma$.. π $\alpha'\beta'\gamma'$.. Samodružné body $\varrho \equiv \varrho'$, $\sigma \equiv \sigma'$ těchto řad jsou body čáry Σ, poněvadž se promítající paprsky $o\varrho$, $o'\varrho'$ protínají na Σ, a taktéž $o\sigma$, $o'\sigma'$.

Spojnice $\overline{\varrho\sigma}$ samodružných bodů jest (čl. 62.) direkční osa Δ křivých řad $\alpha\beta\gamma$.. π $\alpha'\beta'\gamma'$.. t. j. přímka, obsahující body $(\alpha\beta'\ \alpha'\beta)$, $(\alpha\gamma'\ \alpha'\gamma)$, $(\beta\gamma'\ \beta'\gamma)$ atd. Jest tedy tato přímka vždy reálná; její průsečíky se Σ neb s Π, jež lze stanoviti dle čl. 59., jsou hledané další dva společné body ϱ, σ čar Σ atd. Body ty mohou býti imaginárné, a pak jsou stanoveny na Δ involucí indukovanou na této přímce čarou Σ neb Π.

Jsou dány dvě společné tečny dvou kuželoseček, z nichž každá jest stanovena ještě třemi tečnami; nechť se stanoví další dvě společné jich tečny, ať reálné, ať imaginárné.

Buďtež Σ kuželosečka, daná tečnami O, O', A, B, C, a Π tečnami O, O', G, H, K. Tečny A, B, C čáry Σ protínají O, O' ve dvou projektivných řadách, jichž body procházejí k čáře Π, dotýkající se obou řad, tečny tvořící dva soumístné projektivné svazky $\alpha\beta\gamma$.. π $\alpha'\beta'\gamma'$.. Samodružné paprsky $\varrho \equiv \varrho'$, $\sigma \equiv \sigma'$ těchto svazků jsou tečnami čáry Σ, poněvadž spojnice bodů $(O\varrho)$, $(O'\varrho')$ jest tečnou této čáry a taktéž spojnice bodů $(O\sigma)$, $(O'\sigma')$.

Průsečík $(\varrho\sigma)$ samodružných paprsků jest (čl. 62.) direkčním středem δ křivých svazků $\alpha\beta\gamma$.. π $\alpha'\beta'\gamma'$.. t. j. bod, jímž procházejí přímky $\overline{(\alpha\beta)\,(\alpha'\beta)}$, $\overline{(\alpha\gamma')\,(\alpha'\gamma)}$, $\overline{(\beta\gamma')\,(\beta'\gamma)}$, atd. Jest tedy tento bod vždy reálný; tečny jím vedené k Σ neb k Π, jež lze stanoviti dle čl. 60., jsou hledané další dvě společné tečny ϱ, σ čar Σ a Π. Tečny ty mohou býti imaginárné, a pak jsou stanoveny v δ involucí indukovanou v tomto bodě čarou Σ neb Π.

Známe-li jeden z hledaných bodů v levo, plyne druhý bod jako druhý průsečík přímky Δ s kuželosečkou, a obdobně při úloze reciproké, čímž máme *lineárné* řešení úloh:

Jsou dány tři společné body dvou kuželoseček, z nichž každá jest dána ještě dvěma body; nechť se sestrojí jich čtvrtý společný bod.

Jsou-li o, o', a společné body čar Σ, Π a b, c resp. g, h jich další body, promítněme b, c na Π z bodů o, o' do β, γ resp. β', γ' a sestrojme průsečík $(\overline{\beta\gamma'}\ \overline{\beta'\gamma})$; jím a samodružným bodem a prochází direkční osa Δ křivých řad $a\beta\gamma\,..\,\pi\,a\beta'\gamma'\,..$ Druhý společný bod této osy se Σ neb s Π, jejž sestrojíme dle věty Pascalovy, jest hledaný bod, společný oběma čarám.

Jsou dány tři společné tečny dvou kuželoseček, z nichž každá jest dána ještě dvěma tečnami; nechť se sestrojí jich čtvrtá společná tečna.

Jsou-li O, O', A společné tečny čar Σ, Π a B, C resp. G, H jich další tečny, protněme O, O' tečnami B, C, veďme průsečíky k čáře Π tečny β, γ resp. β', γ' a sestrojme spojnici $\overline{(\beta\gamma')\ (\beta'\gamma)}$; na ni a na samodružné tečně A se nalézá direkční střed δ křivých svazků $A\beta\gamma\,..\,\pi\,A\beta'\gamma'\,..$ Druhá tečna tímto středem k Σ neb k Π procházející, již strojíme dle věty Brianchonovy, jest hledaná tečna, společná oběma čarám.

Zobecněná věta Desargues-ova a věta reciproká mají toto znění:

Kuželosečky svazku protínají pevnou kuželosečku, vedenou dvěma základnými body svazku, mimo tyto body ještě ve dvou bodech, jež tvoří páry involuce na pevné kuželosečce; střed této involuce jest na spojnici druhých dvou základných bodů.

Je-li Σ kuželosečka svazku o základných bodech o, o', a, b a Π kuželosečka vedená body o, o', prochází spojnice dalších dvou průsečíků ϱ, σ čar Σ a Π bodem $(\overline{\alpha\beta'}\ \overline{\alpha'\beta})$, značí-li α, β průměty bodů a, b na čáru Π ze středu o, a α', β' ze středu o' stanovené. Jsou tedy ϱ, σ párem involuce na Π o středu $(\overline{\alpha\beta'}\ \overline{\alpha'\beta})$. Že střed ten se na-

Kuželosečky řady mají s pevnou kuželosečkou, dotýkající se dvou základných přímek řady, mimo tyto přímky ještě dvě společné tečny, jež tvoří páry involuce na pevné kuželosečce; osa této involuce prochází průsečíkem druhých dvou základných přímek.

Je-li Σ kuželosečka řady o základných přímkách O, O', A, B a Π kuželosečka dotýkající se přímek O, O', nalézá se průsečík dalších dvou společných tečen ϱ, σ obou čar na přímce $\overline{(\alpha\beta')\ (\alpha'\beta)}$, značí-li α, β tečny čáry Π vedené průsečíky tečen A, B s O, a α', β' tečny vedené průsečíky jich s O'. Jsou tedy ϱ, σ párem involuce

lézá na spojnici $\overline{ab}$, vychází ihned, protneme-li Π zvrhlou čarou svazku, skládající se z přímek $\overline{ab}$, $\overline{oo'}$.

Vedeme-li ze středu involuce $(\overline{\alpha\beta'}\ \overline{\alpha'\beta})$ k čáře Π tečny M, N, jsou jich body dotyčné m, n body oněch dvou kuželoseček daného svazku, jež se dotýkají čáry Π, čímž řešen úkol:

Čtyřmi body vésti kuželosečku, dotýkající se dané kuželosečky, jež prochází dvěma z daných čtyř bodů.

Je-li $(\overline{\alpha\beta'}\ \overline{\alpha'\beta})$ vnější bod k Π, jsou m, n reálné body a úkol má dvě reálná řešení; je-li onen bod uvnitř čáry Π, jsou řešení obě imaginárná, poněvadž reálné kuželosečky Σ, Π se nemohou dotýkati v bodě imaginárném, neb by se pak dotýkaly též v bodě konjugovaném a indukovaly by tudíž jak v bodě $(\overline{\alpha\beta'}\ \overline{\alpha'\beta})$ tak na jeho poláře tytéž involuce, z čehož by dle čl. 73. vycházela jich totožnost.

na Π o ose $\overline{(\alpha\beta')\ (\alpha'\beta)}$. Že osa ta prochází bodem (AB) vychází ihned, stanovíme-li společné tečny čáry Π a zvrhlé kuželosečky řady, skládající se z bodů (AB), (OO).

Protíná-li osa involuce $\overline{(\alpha\beta')\ (\alpha'\beta)}$ čáru Π v bodech m, n, dotýká se v každém z nich čára dané řady kuželosečky Π, čímž řešen úkol:

Sestrojiti kuželosečku, dotýkající se čtyř přímek a dané kuželosečky, jež se sama dotýká dvou z daných přímek.

Je-li $\overline{(\alpha\beta')\ (\alpha'\beta)}$ sečnou čáry Π, jsou m, n a tedy i tečny v nich M, N reálné a úkol má dvě reálná řešení; je-li ona přímka nesečna, nemá úkol reálného řešení, poněvadž reálné kuželosečky Σ, Π se nemohou dotýkati v imaginárném bodě, neb by se pak dotýkaly též v bodě konjugovaném, a indukovaly by tudíž jak na přímce $\overline{(\alpha\beta')\ (\alpha'\beta)}$ tak v jejím pólu tytéž involuce, z čehož by dle čl. 73. vycházela jich totožnost.

84. Oskulující kuželosečky.

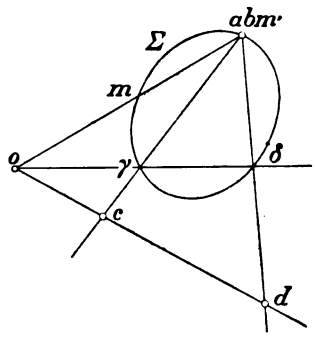
Všecky kuželosečky, jež v daném bodě a mají společnou tečnu a procházejí dvěma body c, d, tvoří svazek, jehož základné body jsou a, b, c, d, značí-li b nekonečně blízký bod k a na dané tečně.

Všecky kuželosečky, jež se dané přímky A dotýkají v témž bodě a zároveň se dotýkají dvou přímek C, D, tvoří řadu, jejíž základné přímky jsou A, B, C, D, značí-li B paprsek nekonečně blízký k A dotyčným bodem vedený.

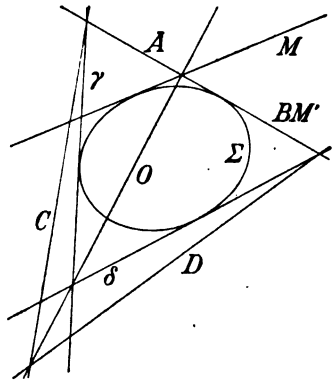
Kuželosečky dotýkající se dané kuželosečky Σ (obr. 97.) v bodě a a procházející dvěma body c, d, protínají tedy čáru Σ v párech bodové involuce, jejíž střed o jest na $\overline{cd}$; pár γ, δ, jejž podává zvrhlá čára $\overline{ac}$, $\overline{bd}$, vede k středu $o \equiv (\overline{cd}, \overline{\gamma\delta})$.

Kuželosečky dotýkající se dané kuželosečky Σ (obr. 98.) v témž bodě, v němž se jí dotýká tečna A, a dvou přímek C, D, stanoví tedy s čarou Σ páry paprskové involuce, jejíž osa O prochází bodem (CD); pár γ, δ, jejž podává zvrhlá čára (AC), (BD), vede k ose $O \equiv (\overline{CD})\ (\gamma\delta)$.

Obr. 97.



Obr. 98.

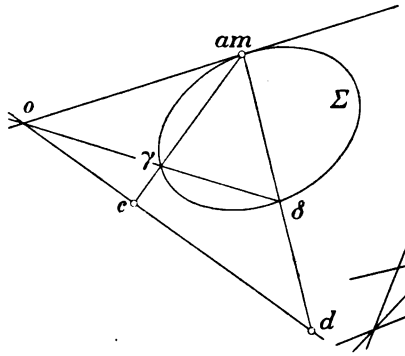


Každý bodový pár involuce na Σ o středu o náleží kuželosečce svazku o základných bodech a, b, c, d; totéž platí speciálně o bodovém páru m, m', jehož jeden bod m' splývá s bodem a. Kuželosečka Σ' vedená body a, b, c, d, m protíná tedy Σ ve čtvrtém bodě, splývajícím s body $a \equiv b$, to jest ona má v bodě a s čarou Σ tři soumezné společné body, protínajíc ji jen ještě v jediném bodě m. Kuželosečka Σ' *oskuluje* čáru Σ v bodě a.

Každý tečnový pár involuce na Σ o ose O náleží kuželosečce řady se základnými přímkami A, B, C, D; totéž platí speciálně o tečnovém páru M, M', jehož jeden paprsek M' splývá s tečnou A. Kuželosečka Σ' dotýkající se přímek A, B, C, D, M má s čarou Σ čtvrtou společnou tečnu, splývající s $A \equiv B$, to jest ona má v tečně A tři soumezné společné tečny s čarou Σ, majíc nad to již jen jednu společnou s ní tečnu M. Kuželosečka Σ' *oskuluje* čáru Σ v dotyčném bodě tečny A.

Tím řešen úkol: *Dvěma body c, d vésti kuželosečku, jež danou kuželosečku Σ v daném bodě a oskuluje.*

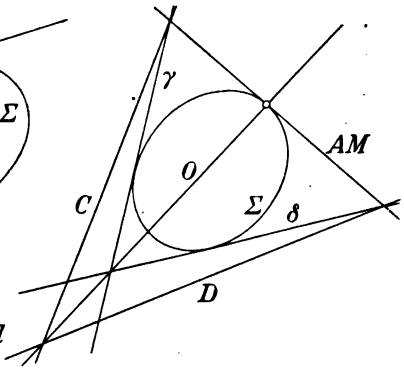
Obr. 99.



Stane-li se, že bod *m* splývá s bodem *a*, sjednotí se všecky čtyři průsečíky čar Σ a Σ' v bodě *a*; *obě čáry se v tomto bodě oskulují ve vyšším stupni*, čili mají styk čtyřbodový. To vymáhá, aby $\overline{oa}$ se dotýkala čáry Σ v bodě *a* (obr. 99.). Tím získána *konstrukce kuželosečky Σ', jež má s danou kuželosečkou Σ v bodě a styk čtyřbodový a jenž prochází daným bodem c*; další bod *d* čáry Σ' musí hověti tomu, aby se $\overline{cd}$ a $\overline{\gamma\delta}$ protínaly na tečně bodu *a*; jest tedy Σ' čára homologická k čáře Σ, zvolíme-li *a* za střed a tečnu v tomto bodě za osu homologie.

Tím řešen úkol: *Sestrojiti kuželosečku, dotýkající se dvou přímek C, D a oskulující danou kuželosečku Σ v daném bodě.*

Obr. 100.



Stane-li se, že tečna *M* splývá s tečnou *A*, sjednotí se všecky čtyři společné tečny čar Σ a Σ' v tečně *A*; *obě čáry se v dotyčném bodě tečny A oskulují ve vyšším stupni*, čili mají styk čtyřtečnový. To vymáhá, aby (*OA*) byl dotyčný bod tečny *A* s čarou Σ (obr. 100.) Tím získána *konstrukce kuželosečky Σ', jež má s danou kuželosečkou Σ podél tečny A styk čtyřtečnový a jenž se dotýká dané přímky C*; další tečna *D* čáry Σ' musí hověti tomu, aby spojnice bodů (*CD*) a ($\gamma\delta$) procházela dotyčným bodem tečny *A*; jest tedy čára Σ' homologická k čáře Σ, zvolíme-li tečnu *A* za osu homologie a její dotyčný bod za střed.

85. Strojení kuželoseček z pěti elementů.

Kuželosečka jest stanovena μ body a ν tečnami, platí-li $\mu + \nu = 5$.

Při $\mu = \nu$, $\nu = 0$ jsme to dokázali v čl. 52. a zároveň seznali konstrukci jediné kuželosečky procházející pěti body. Při $\mu = 0$, $\nu = 5$ to seznáno v témž článku, a podaná konstrukce jediné kuželosečky dotýkající se pěti přímek.

Při $\mu = 4$, $\nu = 1$ jsme seznali v čl. 80., že jsou stanoveny kuželosečky dvě, a tamže podána jich konstrukce; totéž učiněno tamže v případě $\mu = 1$, $\nu = 4$. Zbývají tedy jen případ $\mu = 3$, $\nu = 2$ a případ $\mu = 3$, $\nu = 2$; v příčině jich platí věty:

Třemi body procházejí čtyři kuželosečky, dotýkající se dvou daných přímek; kuželosečky ty jsou buď všecky čtyři reálné neb všecky čtyři imaginárné.

Tří přímek se dotýkají čtyři kuželosečky, procházející dvěma danými body; čáry ty jsou buď všecky čtyři reálné neb všecky čtyři imaginárné.

Abychom dokázali větu po levé straně a zároveň ony čtyři kuželosečky sestrojili, uvažujme dvě tečny T, U a dva body a, b nějaké kuželosečky, o nichž předpokládáme, že nejsou dotyčnými body těchto tečen. Probíhá-li bod přímku $P \equiv \overline{ab}$, tu se polára otáčí kolem pólu p této přímky, jenž jest různý od průsečíku o tečen T, U, a v jedné poloze prochází bodem o, to jest na P nalézáme jeden pól m, jehož polára M prochází bodem o, a bod ten jest vždy reálný.

Protne-li M přímku P v bodě n, jsou jak body m, n vzhledem ke kuželosečce konjugovány, tak přímky M, $M' \equiv \overline{om}$; jest totiž n na poláře bodu m, a M' prochází pólem přímky M. Body m, n, a, b jsou tedy harmonické a taktéž paprsky M, M', T, U, a tedy i průsečíky jejich n, m, t, u s přímkou P. Body m, n oddělujíce harmonicky jak a, b, tak t, u jsou samodružné body involuce a, b; t, u.

Buďte nyní dány dvě přímky T, U a tři body a, b, c, a předpokládejme, že existuje kuželosečka Σ dotýkající se oněch přímek a procházející těmito body. Protne-li $\overline{ab}$ přímky T, U v bodech t, u, stanovme především samodružné body m, n involuce a, b; t, u, a protne-li $\overline{ac}$ přímky T, U v bodech t', u', stanovme samodružné body p, q involuce a, c; t', u'. Je-li supponovaná kuželosečka reálná, jsou dvojné body obou involucí reálné; má-li tedy jen jedna z involucí imaginárné dvojné

body, to jest odděluje-li pár a, b pár t, u, aneb pár a, c pár t', u', tu neexistuje žádná reálná kuželosečka Σ.

Supponujme, že jak m, n, tak i p, q jsou reálné. Pak musí míti místa jedna ze čtyř supposic:

buď jest $\overline{on}$ polárou bodu m, a $\overline{oq}$ polárou bodu p,

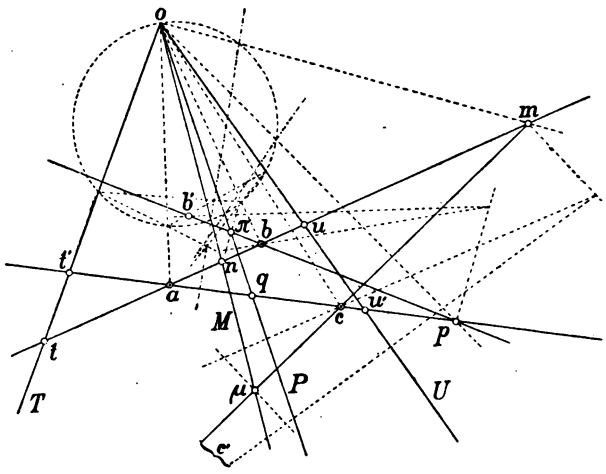
aneb jest $\overline{on}$ polárou bodu m, a $\overline{op}$ polárou bodu q,

aneb jest $\overline{om}$ polárou bodu n, a $\overline{oq}$ polárou bodu p

aneb konečně jest $\overline{om}$ polárou bodu n, a $\overline{op}$ polárou bodu q,

a každá z těchto supposic vede k jednomu řešení.

Obr. 01.



Učiňme na př. první supposici. Jelikož m a M (obr. 101.) jsou pól a polára, obdržíme ihned z bodu c další bod c' kuželosečky, totiž bod harmonický k c vzhledem k m, μ; a podobně vede pól p s polárou $\overline{oq}$ k bodu b' oddělujícímu harmonický pól od poláry. Kuželosečka vedená pěti body a, b, c, b', c' vyhovuje úkolu; ona prochází body a, b, c a vzhledem k

$$(mnab) = (m\mu cc') = -1$$

jest $\overline{on}$ čili M polárou bodu m, a obdobně $\overline{oq}$ polárou bodu p.

Jsou tedy $\overline{om}$, $\overline{on}$ konjugované přímky a taktéž $\overline{op}$, $\overline{oq}$; přímky T, U, jež oddělují dle konstrukce oba páry konjugovaných přímek harmonicky, jsou tudíž tečny (čl. 66.) kuželosečky, jak bylo dokázati. — Konstrukce potrvá v platnosti i tenkráte, kdy dané tečny T, U jsou dvě konjugované imaginárné přímky; body m, n jsou pak dány jakožto samodružné body involuce o páru a, b a o imaginárném páru t, u. Promít-

neme-li ji z bodu o na kružnici, vedenou tímto bodem, do bodové involuce o párech a_0, b_0, resp. t_0, u_0, jest spojnice $\overline{t_0u_0}$ osa involuce, v které protíná daná involuce o samodružných imaginárných paprscích T, U kružnici; průsečík této osy s $\overline{a_0b_0}$ jest střed bodové involuce, jejíž samodružné body se promítají z o na $\overline{ab}$ do bodů m, n.

Zároveň patrno, že v případě reálných samodružných elementů m, n a p, q má úkol čtyři reálná řešení, v případě nereálných žádného reálného řešení. Větu po pravé straně lze dokázati způsobem reciprokým a zároveň sestrojiti čtyři kuželosečky procházející dvěma body a dotýkající se tří přímek, a to i tenkráte, kdy dané body jsou konjugované imaginárné; to však zůstavujeme čtenáři.

86. Polárná vlastnost svazku a řady kuželoseček.

Poláry libovolného bodu vzhledem ke kuželosečkám svazku procházejí jedním bodem, tvoříce svazek projektivný s oním svazkem kuželoseček.

Póly libovolné přímky vzhledem ke kuželosečkám řady jsou na jedné přímce, tvoříce řadu projektivnou s onou řadou kuželoseček.

Buďte a, b, c, d základné body svazku kuželoseček, p libovolný bod a Σ, Σ', Σ''.. čáry svazku, vzhledem k nimž bod p měj poláry P, P', P''..

Přihlédněme ke kuželosečce vedené pěti body a, b, c, d, p a k její tečně T v bodě p. Bod p jest jedním samodružným bodem involuce, stanovené čarami svazku na přímce T; druhý, vždy reálný, samodružný bod její budiž q. Body p, q oddělují harmonicky body každého páru involuce, t. j. průsečíky čar Σ, Σ', Σ'',.. s přímkou T; jest tedy q na poláře bodu p vzaté vzhledem k libovolné čáře svazku, t. j. poláry P, P', P''.., procházející všecky bodem q.

Abychom dokázali projektivnost svazku $PP'P''$.. se svazkem $\Sigma\Sigma'\Sigma''$.., spojme pól p s jedním základným bodem, na př. a, a označme body, v nichž čáry svazku spojnici $\overline{pa}$ mimo a protnou, literami x, x', x''.., a body, v nichž tuto spojnici protínají poláry P, P', P''.. literami y, y', y''.. Svazek $PP'P''$.. jest perspektivný k řadě $yy'y''$.., a svazek kuželoseček $\Sigma\Sigma'\Sigma''$.. jest (čl. 79.) projektivný k řadě $xx'x''$.. Stačí tedy dokázati projektivnost obou řad; to ale vychází z rovnice

$$(axpy) = -1,$$

již, dle čl. 8., můžeme přepsati na

$$(apxy) = 2,$$

a která ukazuje, že mezi dělícími poměry sdružených bodů x, y vzhledem k pevným bodům a, p vzatými jest relace obapolně lineárná. Obdobně by se dokázala věta reciproká, po pravé straně umístěná.

Věty ty připouští definovati svazek neb řadu kuželoseček o čtyřech imaginárných základných bodech resp. přímkách projektivně k danému jinému útvaru.

Důkaz se stává illusorním, je-li p na některé z šesti stran úplného čtyrrohu $abcd$, na př. na straně $\overline{ab}$; kuželosečka svazku jím procházející jest zvrhlá čára $\overline{ab}$, $\overline{cd}$, a její tečna v p jest ab, kteréž se nedotýká žádná čára svazku, a k níž se také věta Desargues-ova nevztahuje. Jest však přímo patrno, že i v tomto případě poláry bodu p tvoří svazek projektivný se svazkem kuželoseček; procházejí totiž patrně všecky bodem q harmonickým k p vzhledem k a, b, a jich stopy na spojnici $\overline{pb}$ tvoří opět řadu projektivnou se svazkem kuželoseček. Tento poslední závěrek se stává illusorním jen tenkráte, je-li p na dvou stranách protějších úplného čtyrrohu $abcd$; *každý z tří diagonálných rohů tohoto čtyrrohu má vzhledem ke všem čarám svazku touž poláru, t. protější diagonálnou stranu* (čl. 66.), kdežto každý roh, na př. a, má poláry jím procházející, tvořící svazek projektivný se svazkem kuželoseček (čl. 79.). *Jest tedy diagonálný tříroh základného čtyrrohu abcd polárným trojúhelníkem vzhledem ke všem čarám svazku, a obdobně diagonálný trojstran základného čtyrstranu ABCD polárným trojstranem vzhledem ke všem čarám řady.*

Póly libovolné přímky vzhledem ke kuželosečkám svazku naplňují kuželosečku procházející diagonálnými rohy základného čtyrrohu, a tvoří křivou řadu projektivnou se svazkem kuželoseček.

Poláry libovolného bodu vzhledem ke kuželosečkám řady jsou tečnami kuželosečky, dotýkající se diagonálného trojstranu základného čtyrstranu, a tvoří křivý svazek projektivný s řadou kuželoseček.

Abychom stanovili póly přímky O vzhledem k čarám svazku, vytkněme na O dva body p, r, a označme poláry bodu p jako nahoře P, P', P''.., poláry bodu r ale R, R', R''.. Průsečné body (PR), $(P'R')$, $(P''R'')$.. jsou póly o, o', o''.. přímky O vzhledem k čarám Σ, Σ', Σ''.. Paprsky P, P', P''.. tvoří svazek projektivný se svazkem kuželoseček, a totéž platí o pa-

prscích R, R', R'' . . ; jsou tedy tyto dva svazky paprskové projektivné a body o, o', o'' . . na kuželosečce Π. Křivá řada, jsouc perspektivná k oběma svazkům, jest projektivná se svazkem kuželoseček.

Poláry bodů p, r vzhledem k zvrhlé čáře na př. $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ procházejí diagonálným rohem $(\overline{ab}\ \overline{cd})$, a jich průsečík, t. j. tento diagonálný roh jest bodem kuželosečky Π.

Obdobně lze dokázati větu reciprokou.

Kapitola X.

Střed, sdružené průměry, osy, ohniska, řídící přímky kuželoseček. Imaginárné body kruhové v nekonečnu. Konfokální kuželosečky. Oskulační kružnice. Homothetické kuželosečky.

87. Střed a sdružené průměry.

Dle definice v čl. 48. vyřknuté jest hyperbola kuželosečkou protínající přímku nekonečně vzdálenou ve dvou reálných bodech, ellipsa kuželosečkou protínající ji ve dvou imaginárných bodech, a parabola kuželosečkou dotýkající se oné přímky.

Jest tedy nekonečně vzdálená přímka sečnou hyperboly, nesečnou ellipsy a tečnou paraboly. Pól nekonečně vzdálené přímky jest jen vzhledem k parabole na přímce samé, a sice jest to dotyčný bod této přímky; při ellipse a hyperbole jest mimo ni, t. j. v konečnu.

Vedeme-li pólem o přímky nekonečně vzdálené O_∞ vzhledem k ellipse neb hyperbole sečnu, jest o bodem harmonickým k bodu nekonečně vzdálenému vzhledem k bodům čáry, t. j. bod o jest středem každé tětivy tím bodem vedené, čili středem čáry. *Pól nekonečně vzdálené přímky vzhledem k ellipse neb hyperbole jest středem čáry; střed ellipsy jest vnitřním, střed hyperboly vnějším bodem vzhledem k čáře*, neb v prvním případě jest to pól nesečny, v druhém pól sečny (čl. 65.).

Polára A nekonečně vzdáleného bodu a_∞ jest průměr, t. j. přímka procházející středem o; jest totiž a_∞ na O_∞ a tedy o na A. Průměr A rozpoluje všecky tětivy rovnoběžné se směrem a_∞; jsou totiž jich koncové body harmonické k pólu a_∞ a k bodu na poláře. Protne-li průměr A kuželosečku, *procházejí tečny v průsečných bodech pólem a_∞, t. j. mají směr rovnoběžných*

tětiv, jež průměr A rozpoluje. Je-li b_∞ nekonečně vzdálený bod průměru A, jest $\overline{oa_\infty}$ jeho polárou B; jest totiž pól b_∞ na O a na A, pročež musí o a a_∞ býti na poláře B.

Dva průměry A, B, z nichž každý rozpoluje tětivy rovnoběžné s druhým, slují sdruženými průměry; ony tvoří s přímkou v nekonečnu O_∞ polárný trojstran kuželosečky, a zároveň jsou párem sdružených polár, středem vedených.

Sdružené průměry tvoří páry involuce, indukované kuželosečkou ve středu, jejíž samodružné paprsky jsou tečny středem vedené, dotýkající se čáry v jejích průsečících s polárou středu, t. j. v jejích nekonečně vzdálených bodech; jsou tedy tyto samodružné paprsky asymptoty čáry. Při hyperbole jsou tyto tečny reálné, při ellipse imaginárné; každý průměr ellipsy, procházeje vnitřním bodem o, jest sečnou, kdežto při hyperbole oddělují asymptoty průměry, jež jsou sečnami, od průměrů, jež jsou nesečnami (čl. 61.). *Každé dva sdružené průměry oddělují asymptoty harmonicky*, poněvadž jsou párem involuce, jejíž samodružné paprsky jsou asymptoty; *ze dvou sdružených průměrů hyperboly jest tedy jeden sečnou a jeden nesečnou, kdežto u ellipsy jsou oba sečnami*, tak že tečny v jich koncových bodech sestrojené tvoří rovnoběžník ellipse opsaný o stranách stejnosměrných se sdruženými průměry. *U hyperboly žádný pár sdružených průměrů není žádným jiným párem oddělen, u ellipsy každý každým.*

Je-li rovnoběžník opsán ellipse neb hyperbole, jsou jeho diagonály dva sdružené průměry. Strany A, B, C, D rovnoběžníku (obr. 102.) tvoří totiž opsaný čtyrstran, jehož diagonálný trojstran jest tudíž polárným; jedna diagonálná strana jest však v nekonečnu, a tedy se druhé dvě protínají ve středu čáry a jsou sdruženými polárami. — Dotyčné body a, b, c, d čtyř tečen tvoří úplný čtyrroh o témž diagonálném trojúhelníku (čl. 52.); jeden diagonálný roh jest střed čáry a druhé dva jsou v nekonečnu, t. j. strany v počtu šesti tohoto úplného čtyrrohu jsou stranami a úhlopříčkami vepsaného rovnoběžníku, a sice jsou strany podvojně rovnoběžny s úhlopříčnami opsaného rovnoběžníku a úhlopříčky se protínají ve středu čáry.

Je-li rovnoběžník vepsán ellipse neb hyperbole, jest jeho střed středem čáry a jím vedené rovnoběžky se stranami jsou dva sdružené průměry. Rovnoběžky ty a přímka v nekonečnu jsou totiž diagonálnými stranami vepsaného úplného čtyrrohu, jehož rohy jsou vrcholy daného rovnoběžníku. *Spojnice libovolného bodu čáry*

s konci průměru jsou rovnoběžny s dvěma sdruženými průměry, poněvadž tvoří dvě strany vepsaného rovnoběžníku. Přihlížejíce k větě o opsaném rovnoběžníku, volme dvě rovnoběžné tečny A, B za dvě strany jeho a protněme je libovolným průměrem P ve dvou vrcholech jeho; další tečny těmito vrcholy procházející budou, vzhledem k středové symmetrii čáry, rovnoběžny, a vzniká opsaný rovnoběžník, jehož druhá úhlopříčna Q jest sdružený průměr ku P. Tím vychází věta: Každé dva sdružené průměry protínají dvě rovnoběžné tečny ve čtyřech bodech, jich další dvě spojnice jsou dvěma rovnoběžnými tečnami. — Obdobně plyne z věty o vepsaném rovnoběžníku tato věta: Vedeme-li konci průměru rovnoběžky s dvěma sdruženými průměry, protnou se tyto ve dvou bodech kuželosečky, na průměru položených.

Stačí pohlédnouti na obr. 102., aby vyšla správnost výroku: Jsou-li dány dvě rovnoběžné tečny A, B se svými body dotyčnými a, b a další tečna C, a vedeme-li bodem a rovnoběžku s průměrem procházejícím bodem (BC), prochází tato rovnoběžka dotyčným bodem tečny C; a taktéž správnost výroku: Dány-li dvě rovnoběžné tečny A, B s dotyčnými body a, b a další bod c kuželosečky, tu protne tečna C tohoto bodu tečnu A v bodě průměru rovnoběžného s $\overline{bc}$, a tečnu B v bodě průměru rovnoběžného s $\overline{ac}$.

Při parabole jest přímka v nekonečnu O_∞ tečnou a její dotyčný bod o_∞ jejím pólem, *jenž jest též zván jejím středem*; parabola vlastního středu nemá, neboť by polára takového bodu byla patrně přímka v nekonečnu. Polára A libovolného bodu v nekonečnu a_∞ prochází bodem o_∞ a sluje průměrem paraboly rozpolujíc všecky rovnoběžné tětivy, bodem a_∞ procházející, a sice průměrem sdruženým se směrem oněch tětiv; *všecky průměry paraboly jsou rovnoběžny, procházejíce bodem* o_∞.

Vedeme-li vnějším bodem m ke kuželosečce tečny, rozpoluje průměr P bodem m procházející spojnici dotyčných bodů a, b. Spojnice $\overline{ab} \equiv M$ jest polára bodu m, a O_∞ jest polára středu o, tudíž jest $\overline{mo}$ pólarou bodu (MO_∞), t. j. mo jest průměr půlící všecky tětivy rovnoběžné s M. Je-li čára parabolou, vidíme, že *spojnice vnějšího bodu m se středem s spojnice dotyčných bodů a, b má pevný směr*, procházejíc bodem o_∞, a že *spojnici tu rozpoluje parabola*, neboť body m, s odděluje parabola harmonicky.

Je-li ve dvou větách předchozího článku polára přímka v nekonečnu, máme tyto speciálnější věty:

Středy všech kuželoseček dotýkajících se čtyř přímek A, B, C, D naplňují přímou řadu projektivnou s řadou kuželoseček. Pól nekonečně vzdálené přímky vzhledem k zvrhlé čáře (AB), (CD) řady jest (čl. 69.) bod rozpolující vzdálenost bodů (AB) a (CD) t. j. protějších rohů čtyrstranu základného. Nalézají se tedy tři středobody spojnic protějších rohů úplného čtyrstranu na přímce, a ta jest geometrickým místem středů všech kuželoseček vepsaných do čtyrstranu. *Z toho jde ihned konstrukce středu kuželosečky dané pěti tečnami A, B, C, D, E*; stačí právě vytčenou přímku sestrojiti vzhledem k čtyrstranu *ABCD* a též vzhledem k *ABCE*, průsečík obou jest hledaný střed.

Středy všech kuželoseček svazku naplňují kuželosečku procházející diagonálnými rohy základného čtyrrohu, a tvoří křivou řadu projektivnou se svazkem.

88. Osy kuželosečky; délka laterálného průměru.

Involuce sdružených průměrů při ellipse neb hyperbole má obecně jeden pravoúhlý pár; *jeho elementy jsou kolmé sdružené průměry a slují osami kuželosečky.* Každá osa rozpoluje tedy tětivy vedené k ní kolmo, to jest každá osa jest osou souměrnosti pro kuželosečku.

Osy hyperboly rozpolují úhly asymptotami sevřené, jsouť k nim harmonické a kolmé (čl. 8.); *jedna z os jest sečnou a ta sluje hlavní čili reálnou, druhá nesečnou a ta sluje laterální čili imaginárnou.* Průsečíky osy s kuželosečkou slují *vrcholy* čáry; má ellipsa čtyři, hyperbola dva reálné vrcholy.

Vyskytnou-li se v involuci sdružených průměrů *dva* pravoúhlé páry, jsou každé dva sdružené průměry k sobě kolmy (čl. 36.) a *kuželosečka jest kružnicí.* Spojíme-li totiž libovolný bod x kuželosečky s koncovými body a, b některého průměru, jsou spojnice $\overline{ax}$, $\overline{bx}$ dle předchozího článku rovnoběžny s dvěma sdruženými průměry a tudíž k sobě kolmy, z čehož patrno, že x jest na kružnici o průměru $\overline{ab}$. U kružnice jest polára M libovolného bodu m kolma na průměr pólem procházející; průměr ten jest totiž polárou nekonečně vzdáleného bodu přímky M a tedy k ní kolmý.

Při parabole mají všecky průměry čili poláry nekonečně vzdálených pólů jeden směr, procházejíce bodem dotyčným o_∞ paraboly s přímkou O_∞. Průměr, který rozpoluje tětivy kolmé k tomuto směru, jest patrně osou symmetrie paraboly a *sluje její*

osou. Osa protíná parabolu v jednom bodě v v konečnu, jenž sluje *vrcholem* paraboly, a tečna V v něm *vrcholovou tečnou*; tečna ta jest kolma k ose, majíc směr zmíněných tětiv, čili procházejíc pólem osy.

Kuželosečka Σ jest dána pěti body a, b, c, d, e; nechť se sestrojí její střed, osy, asymptoty.

K tětivě $\overline{ab}$ veďme bodem c rovnoběžku a sestrojme její další průsečík c' s kuželosečkou Σ; přímka P spojující půlící body délek $\overline{ab}$, $\overline{cc'}$ jest průměrem. Vedeme-li k P dvěma body, na př. a, b, rovnoběžky a stanovíme-li jich další průsečíky a', b' s čarou Σ, jest spojnice P' bodů rozpolujících tětivy $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$ průměrem sdruženým s P; bod (PP') jest středem čáry.

Vyjdeme-li z jiné tětivy na př. $\overline{ac}$, obdržíme obdobně druhý pár sdružených průměrů Q, Q'; pravoúhlý pár involuce P, P'; Q, Q' podává osy kuželosečky Σ, a samodružné paprsky této involuce jsou jejími asymptotami; jsou-li tyto reálné, jest čára ellipsou, jsou-li imaginárné hyperbolou, arci za supposice, že bod (PP') jest v konečnu.

Padá-li a' do nekonečna, jest čára Σ parabolou a průměr půlící tětivy kolmé k P její osou; sestrojivše průsečík této osy se Σ, třeba větou Pascalovou, máme i vrchol její. V případě neparabolické čáry Σ lze též snadno stanoviti průsečné body os s čarou Σ, a obecněji *průsečné body libovolného průměru R s čarou.* Veďme bodem a rovnoběžku s R, stanovme její druhý průsečík a_0 s čarou, a spojme půlící bod tětivy $\overline{aa_0}$ se středem, čímž obdržíme sdružený průměr R'. Tečna A bodu a protne průměr R v bodě m, jehož polára M ovšem prochází bodem a a jest rovnoběžna se sdruženým průměrem R'. Značíme-li m' průsečík poláry M s R, máme na R sdružené body m, m' a o, o'_∞, značíce o střed kuželosečky; páry m, m'; o, o'_∞ stanoví involuci indukovanou na R, o jest její centrálný bod, součin (om), $\times$ (om') její potence a její samodružné body jsou průsečíky čáry s R. Jsou-li m, m' po téže straně středu o, má involuce reálné samodružné body r, s, to jest průměr R protíná kuželosečku v reálných bodech r, s, jichž vzdálenost od středu jest střední geometrická úměra λ mezi $\overline{om}$ a $\overline{om'}$. Jsou-li m, m' po různých stranách středu o, jsou samodružné body r, s imaginárné, a čára Σ protíná průměr R ve dvou imaginárných bodech, jichž vzdálenost od středu jest $\pm\sqrt{(om)(om')}$, to jest: $\pm\lambda\sqrt{-1}$, značí-li λ opět střední geometrickou úměru délek $\overline{om}$, $\overline{om'}$; v tomto případě se v involuci na R vyskytuje jeden pár sdružených bodů od centrál-

ného stejně vzdálených, body o vzdálenostech $\pm\lambda$, a jich vzdálenost jest 2λ. V prvním případě jest $\overline{rs}$ čili 2λ *délkou průměru* R, v druhém *sluje délkou imaginárného čili lépe laterálného průměru* R; speciálně tím definována délka laterálné osy hyperboly.

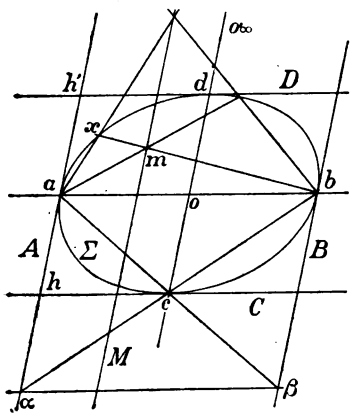
Kuželosečka jest dána pěti tečnami A, B, C, D, E; *nechť se sestrojí její střed, osy, asymptoty.*

Sestrojením dotyčných bodů daných tečen převedeme úkol na předchozí; ostatně obdržíme střed snadno dle návodu článku předcházejícího. — Přímějším způsobem řešíme úkol tím, že sestrojíme větou Brianchonovou tečnu rovnoběžnou s A, a tečnu rovnoběžnou s B, čímž nalezneme opsaný rovnoběžník, a v jeho diagonálách dva sdružené průměry. Vycházejíce z tečen C, D sestrojíme druhý opsaný rovnoběžník a druhý pár sdružených průměrů, čímž stanovena involuce sdružených průměrů; její pravoúhlý pár podává osy a její samodružné paprsky jsou asymptotami dané kuželosečky.

89. Strojení kuželosečky ze dvou sdružených průměrů.

Dvě délky $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ (obr. 102.), jež se navzájem ve společném bodě o rozpolují, lze pokládati za sdružené průměry ellipsy, jež jest pak úplně stanovena. Veďme totiž body a resp. b rovnoběžky A, B s $\overline{cd}$ a stanovme kuželosečku Σ třemi body a, b, c a tečnami A, B v prvních dvou. Přihlédneme-li k vepsanému trojúhelníku abc, shledáme dle věty čl. 52. snadno, že tečna C bodu c jest rovnoběžna s přímkou $\overline{ab}$; C se musí totiž protnouti s $\overline{ab}$ na Pascalově přímce $\overline{\alpha\beta}$, patrně rovnoběžné s $\overline{ab}$.

Obr. 102.



Druhý průsečík x přímky $\overline{co}$ se Σ plyne též větou Pascalovou, jakož obrazec ukazuje; stačí přihlédnouti k vepsanému šestiúhelníku *caabbx*, z něhož vychází, že x splývá s d.

Nyní soudíme jako dříve, že tečna D v bodě d jest rovnoběžna s $\overline{ab}$. Čáře Σ jest tedy rovnoběžník $ABCD$ opsán, a tudíž jest (čl. 87.) Σ ellipsou o sdružených průměrech $\overline{ab}$, $\overline{cd}$. Znajíce

čtyry body a, b, c, d její s tečnami, strojíme Σ dle věty Pascalovy neb dle věty Brianchonovy.

Dány-li délky $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ jakožto sdružené průměry hyperboly, na př. $\overline{ab}$ jakožto reálný a $\overline{cd}$ jakožto sdružený laterálný průměr, jest hyperbola též úplně stanovena. Kuželosečky vedené body a, b a dotýkající se přímek A, B tvoří svazek o základných bodech $aabb$; ve svazku tom jsou přímky aa, bb čili A, B jednou, a přímky splývající $\overline{ab}$, $\overline{ab}$ druhou zvrhlou čarou, a tedy body o, o'_∞ na $\overline{cd}$ samodružné body involuce vytvořené svazkem kuželoseček na $\overline{cd}$ (čl. 80.). Body c, d budou sdruženými póly vzhledem k oné čáře Σ svazku, jež protíná $\overline{cd}$ ve dvou bodech r, s harmonických k c, d; jsou tedy r, s harmonické k c, d i k o, o'_∞ t. j. čára Σ prochází imaginárnými dvojnými body involuce c, d; o, o'_∞ a lze ji dle čl. 72. sestrojiti. Čára Σ oddělujíc harmonicky bod o od o'_∞ a od nekonečně vzdáleného bodu přímky $\overline{ab}$ má poláru bodu o v nekonečnu, tedy o za střed, a $\overline{cd}$ za průměr sdružený k $\overline{ab}$, jelikož tečny A, B jsou rovnoběžny k $\overline{cd}$; mimo to jsou c, d sdružené póly vzhledem k Σ, a tedy jsou $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ dva sdružené průměry čáry Σ, a totiž první reálný, druhý imaginárný, a tudíž Σ zmíněná hyperbola.

Jiné konstrukce kuželosečky, dané dvěma sdruženými průměry, se doděláme, uvažujeme-li libovolný bod x kuželosečky a koncové body a, b reálného průměru. Každá přímka M vedená pólem strany $\overline{ab}$ vepsaného třírohu abx, to jest vedená rovnoběžně se sdruženým průměrem $\overline{cd}$, jest protnuta stranami $\overline{ax}$, $\overline{bx}$ ve dvou reciprokých pólech m, m' a naopak (čl. 71.); mění-li se x na čáře, obdržíme tím všecky páry m, m' involuce, indukované na M. Zvolíme-li za M speciálně sdružený průměr $\overline{cd}$, jest střed o centrálný bod indukované involuce; je-li čára ellipsou, jsou c, d její dvojné body a $(oc)^2$ její potence, je-li ale čára hyperbolou, jest c, d párem indukované involuce a tedy $-(oc)^2$ její potence.

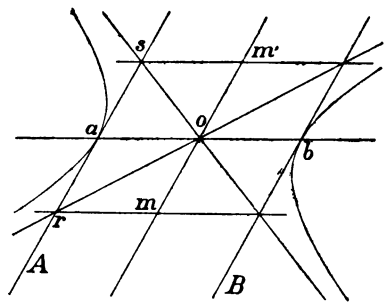
Sestrojivše v obou případech další páry m, m' involuce, dané jednou dvojnými body c, d, podruhé dvěma páry c, d; o, o'_∞, protnou se spojnice am, am' se spojnicemi bm, bm' v bodech hledané kuželosečky. Větu právě užitou lze takto vysloviti:

Přímky, spojující koncové body průměru s dvěma sdruženými body, položenými na přímce rovnoběžné se sdruženým průměrem, se protínají na kuželosečce.

90. Strojení os ze dvou sdružených průměrů.

Budiž $\overline{ab}$ reálný průměr hyperboly (obr. 103.); spojíme-li nekonečně vzdálený bod její s a a b, protnou (čl. 89.) spojnice sdružený průměr M v páru m, m' involuce indukované na M, to jest vedeme-li body a, b rovnoběžky s jednou asymptotou, obdržíme na sdruženém průměru M pár m, m'. Tečny A, B jsou rovnoběžny s M, a tedy délky $\overline{om}$, $\overline{om'}$ stejné, a tudíž (čl. 88.) $\overline{mm'}$ délkou laterálného průměru M. K téže délce patrně vede druhá asymptota. Má tedy rovnoběžník sestrojený nad $\overline{ab}$, $\overline{mm'}$ za diagonály asymptoty t. j.:

Obr. 103.



Při hyperbole má rovnoběžník, sestrojený nad dvěma sdruženými průměry, asymptoty za úhlopříčky.

Budiž a libovolný bod ellipsy (obr. 102.) a A jeho tečna. Involutorný svazek sdružených průměrů protne tečnu A v bodové involuci. Přihlédneme-li k průměru $\overline{ab}$ a k jeho sdruženému $\overline{cd}$, jenž jest rovnoběžný s tečnou A, seznáváme, že a jest centrálným bodem této involuce; a přihlédneme-li k úhlopříčnám rovnoběžníku nad $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ sestrojeného, jež jsou též dvěma sdruženými průměry, shledáváme, že jest h, h' párem této involuce a tedy $-(ah)^2$ čili $-(oc)^2$ její potencí.

Při hyperbole stanoví involuce sdružených průměrů na tečně A libovolného bodu a (obr. 103.) involuci bodovou, též o centrálném bodě a, jejíž dvojné body r, s vytknou asymptoty; jest tedy potence její $(ar)^2$ čili $(om)^2$. Tím nalézáme větu:

Součin délek, stanovených na libovolné tečně dvěma sdruženými průměry ellipsy neb hyperboly a s. měřených od bodu dotyčného, jest stálý rovnaje se při ellipse záporně a při hyperbole kladně vzatému čtverci poloměru rovnoběžného s onou tečnou.

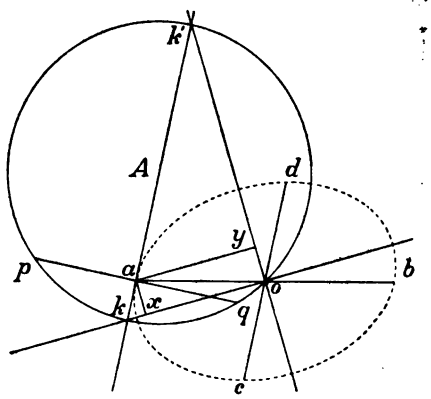
Na základě těchto dvou vět řešíme nyní úkol:

Sestrojiti osy ellipsy neb hyperboly, dané dvěma sdruženými průměry.

Buďte $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ dané sdružené průměry ellipsy (obr. 104.). Veďme bodem a tečnu A rovnoběžně s $\overline{cd}$ a nanesme na nor-

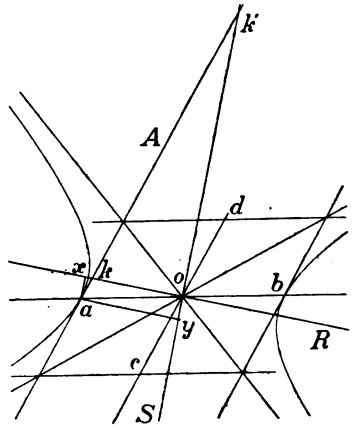
málu délky $\overline{ap} = \overline{aq} = \overline{oc}$; kružnice, vedená body p, q, protne pak A ve dvou bodech, jichž vzdálenosti od a mají součin $-(oc)^2$, tedy ve dvou sdružených bodech předchozí involuce. Spojnice těchto bodů se středem o jsou tudíž sdruženými průměry. Vedeme-li kružnici body p, q a o, obdržíme kolmé sdružené průměry $\overline{ok}$, $\overline{ok'}$, to jest osy.

Obr. 104.



Polára bodu k, na ose položeného, prochází pólem jejím, to jest nekonečně vzdáleným bodem druhé osy, jest tudíž kolmá k ose $\overline{ok}$; jest to tedy kolmice $\overline{ax}$ bodem a k ose $\overline{ok}$ spuštěná. Involuce indukovaná na ose $\overline{ok}$ má centrálný bod o, a bodový pár k, x, tak že délka poloosy do $\overline{ok}$ zapadající jest střední geometrická úměra mezi $\overline{ok}$ a $\overline{ox}$. Obdobně jest délka poloosy do $\overline{ok'}$ spadající střední geometrická úměra mezi $\overline{ok'}$ a $\overline{oy}$, je-li $\overline{ay}$ kolmice s bodu a na osu $\overline{ok'}$ spuštěná.

Obr. 105.



Dána-li za druhé hyperbola reálným průměrem $\overline{ab}$ (obr. 105.) a sdruženým laterálným průměrem $\overline{cd}$, sestrojme rovnoběžník nad těmito délkami; jeho diagonály P, Q jsou asymptoty hyperboly, a přímky R, S rozpolující je jsou její osy. Osa R spadající s reálným průměrem $\overline{ab}$ do téhož úhlu asymptot, jest reálná, přímka S laterálná osa hyperboly.

Osy R, S protnou tečnu A v bodech k, k', jichž poláry $\overline{ax}$, $\overline{ay}$ procházejí ovšem dotyčným bodem a a jsou resp. kolmy na R, S. Reciproké póly k, x jsou jedním párem, a střed o centrálným bodem involuce indukované na ose R; střední geometrická úměra mezi $\overline{ok}$, $\overline{ox}$ jest tedy reálná poloosa. Doplníme-li obdélník nad reálnou osou tak, aby asymptoty byly jeho úhlo-

příčnami, jest druhá jeho strana délkou laterálné poloosy. K této vedou ostatně též sdružené body k', y na S položené; laterálná poloosa jest totiž střední geometrická úměra mezi $\overline{ok'}$, $\overline{oy}$.

91. Ohniska kuželosečky.

Ohniskem kuželosečky sluje bod, v němž indukovaná involuce jest pravoúhlá.

Každé ohnisko jest uvnitř kuželosečky; jsouť tečny jím procházející samodružné paprsky indukované pravoúhlé involuce, a tedy imaginárné.

Každé ohnisko jest na ose. Je-li f ohnisko a o střed kuželosečky, jest $\overline{fo}$ sdružená přímka s kolmicí $\overline{fo'_\infty}$ k ní bodem f vedenou. Pól přímky $\overline{fo}$ jest tedy na $\overline{fo'_\infty}$ a ovšem též na poláře O_∞ středu o; jest tedy o'_∞ pólem přímky $\overline{fo}$, a $\overline{oo'_\infty}$ sdružený průměr k $\overline{fo}$ k němu kolmý, $\overline{fo}$ pak osou.

Spojnice dvou ohnisek f, f' jest osou kuželosečky; přímky k $\overline{ff'}$ kolmé body f resp. f' vedené jsou k $\overline{ff'}$ sdruženy a protínají se tudíž v pólu jejím o'_∞. Ten jest v nekonečnu na přímce kolmé k $\overline{ff'}$, a tedy $\overline{ff'}$ osou.

V kružnici jest střed ohniskem, a jiného ohniska kružnice nemá. Přihlédneme-li k sdruženým paprskům, vedeným libovolným bodem, mimo střed položeným, snadno nahlédneme, že jen paprsek středem vedený a jeho sdruženy jsou kolmy; nemůže tedy bod mimo střed položený býti ohniskem. Z následující úvahy kružnici vylučujeme.

Na ose stanoví každé dvě kolmé sdružené přímky pár bodové involuce. Střed kuželosečky jest jejím bodem centrálným, a dvojné body její, jsou-li reálné, ohnisky kuželosečky; nejsou-li reálné, promítá se involuce ze dvou bodů druhé osy dvěma pravoúhlými involucemi paprskovými, a tyto body jsou ohnisky.

K libovolné přímce nalézáme jedinou kolmou sdruženou přímku: jest to kolmice k dané přímce, vedená jejím pólem.

Zvolme na ose A ellipsy neb hyperboly libovolný bod a a sestrojme k libovolné přímce M jím vedené sdruženou kolmou M'; ta nechť protne osu A v bodě a'. Přímky sdružené, vedené body a resp. a' tvoří sdružené paprsky dvou projektivných svazků (čl. 68.); ve svazcích těch jsou si přiřaděny M, M', dále $\overline{aa'}$ a paprsek bodem a' kolmo k $\overline{aa'}$ vedený, konečně kolmice k $\overline{aa'}$ bodem a vedená a paprsek $\overline{a'a}$. Sdružené paprsky M, M' se protínají na kružnici opsané nad průměrem $\overline{aa'}$,

a kružnice ta se dotýká paprsků kolmých k $\overline{aa'}$ a body a, a' vedených, t. j. paprsků příslušných společnému paprsku svazků a, a'. Svazky ty vytvořují tudíž kružnici, t. j. každý paprsek vedený bodem a jest reciprokou polárou kolmice na něj s bodu a' spuštěné.

Vedeme-li všecky přímky rovnoběžné s M, tvoří tyto svazek o vrcholu m_∞, a kolmé reciproké poláry M' ovšem svazek o vrcholu m'_∞. Svazky ty jsou dle čl. 68. projektivné, a tedy jsou si také body a, a' projektivně přiřaděny; že tato souvislost bodů a, a' jest involutorna, jest přímo patrno. — Volíme-li bod a na A v nekonečnu, jsou paprsky jím vedené rovnoběžné s A, a tedy jich póly na druhé ose; kolmé k nim sdružené paprsky se tedy všecky stotožňují s druhou osou a protínají A ve středu o; jest tedy o centrálný bod involuce a, a'.

Má-li tato involuce reálné dvojné body r, s, jsou to ohniska; libovolný paprsek M bodem r procházející má totiž sdružený kolmý paprsek týmž bodem procházející. Nemá-li involuce na A reálných dvojných bodů, nalezneme (čl. 37.) na druhé ose dvou bodů f, f', z nichž se promítá pravoúhlou involucí paprskovou; jsou to společné body všech kružnic sestrojených nad průměry $\overline{aa'}$. Paprsky $\overline{fa}$, $\overline{fa'}$ jsou pak k sobě kolmy, a procházejíce sdruženými body a, a' involuce jsou reciproké poláry, tudíž f ohniskem; totéž platí o f'.

Při strojení involuce na ose lze užiti s výhodou tečen a normál kuželosečky; tečna a normála téhož bodu jsou totiž patrně sdruženými kolmými přímkami, pročež lze speciálněji říci, že *tečna s normálou libovolného bodu stanoví na ose pár involuce, jejíž samodružné body jsou ohniska, resp. v případě elliptické involuce, body na druhé ose, z nichž se involuce promítá involucí pravoúhlou.*

Více než dvě reálná ohniska kuželosečka míti nemůže, neboť spojnice dvou ohnisek jest osa, a pouze kružnice má více než dvě osy. Osa ellipsy neb hyperboly, obsahující ohniska, sluje *hlavní osou*; u hyperboly jest to reálná osa, poněvadž ohniska nemohou na laterálné ose se nalézati, jsouce vnitřními body.

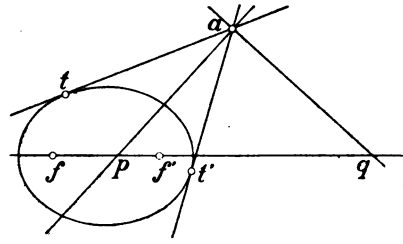
Učiníme-li předchozí úvahu vzhledem k parabole, shledáme, že i pak stanoví kolmé sdružené přímky na ose body involutorně sdružené a, a'. Projektivné svazky utvořené sdruženými přímkami body m_∞ a m'_∞ procházejícími jsou pak perspektivné, poněvadž jich společný paprsek — přímka v ne-

konečnu — jakožto tečna jest sobě přiřaděna. Osa tyto svazky protíná ve dvou involutorných řadách, jichž jeden samodružný bod jest v nekonečnu; lze tedy nekonečně vzdálený bod osy pokládati za ohnisko, druhý samodružný bod f — jediné ohnisko paraboly v pravém slova smyslu — jest arci průsečík osy s osou perspektivnou obou svazků. Tečna a normála libovolného bodu paraboly protínají osu její ve dvou bodech zmíněné involuce, tedy harmonických k f a k bodu v nekonečnu, t. j. ohnisko jest uprostřed mezi oběma průsečíky.

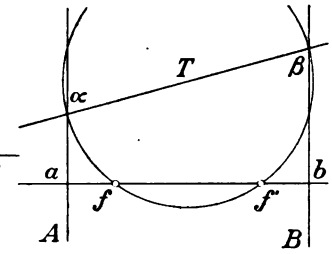
Jsou-li f, f' ohniska kuželosečky, a libovolný bod její, protíná tečna a normála její osu $\overline{ff'}$ v páru bodovém t, n involuce o samodružných bodech f, f'; jsou tudíž jak body f, f', t, n, tak i paprsky, jimiž se z a promítají, harmonické. Poněvadž $\overline{at}$ jest paprsek kolmý k $\overline{an}$, jsou to paprsky půlící úhly přímek $\overline{af}$, $\overline{af'}$ t. j. *tečna a normála rozpolují úhly přímek spojujících bod kuželosečky s oběma ohnisky.*

Značí-li a libovolný bod mimo kuželosečku (obr. 106.) a jsou-li $\overline{ap}$, $\overline{aq}$ přímky půlící úhly obou tečen, bodem a procházejících, jsou jich průsečíky p, q s osou body harmonické k ohniskům f, f', poněvadž jsou $\overline{ap}$, $\overline{aq}$ kolmé reciproké poláry. Paprsky $\overline{ap}$, $\overline{aq}$ $\overline{af}$, $\overline{af'}$ jsou ovšem také harmonické, to jest $\overline{ap}$, $\overline{aq}$ rozpolují též úhly přímek $\overline{af}$, $\overline{af'}$. Z toho jde, že úhel taf se rovná úhlu $t'af'$, to jest *spojíme-li průsečík dvou tečen s ohnisky kuželosečky, uzavírá jedna spojnice s jednou tečnou týž úhel jako druhá spojnice s druhou tečnou.*

Obr. 106.



Obr. 107.



Známe-li hlavní osu $\overline{ab}$ lze pomocí libovolné tečny T snadno sestrojiti ohniska kuželosečky (obr. 107.).

Vrcholové tečny A, B a T tvoří opsaný trojstran, jehož roh (AB) má poláru $\overline{ab}$; rohy (AT) a (BT) se tedy dle čl. 71. promítají z libovolného bodu osy $\overline{ab}$ dvěma sdruženými přím-

kami. Sestrojíme-li tedy nad délkou $\overline{\alpha\beta}$ tečny T, omezenou tečnami vrcholovými, kružnici, protne tato osu $\overline{ab}$ v ohniskách f, f'; jsou totiž sdružené přímky $\overline{f\alpha}$, $\overline{f\beta}$ kolmy, a taktéž $\overline{f'\alpha}$, $\overline{f'\beta}$, jakož pro ohnisko musí býti, a to také stačí, poněvadž osa a bodem f neb f' vedená k ní kolmice podává druhý pár kolmých reciprokých polár.

92. Řídící přímky kuželosečky.

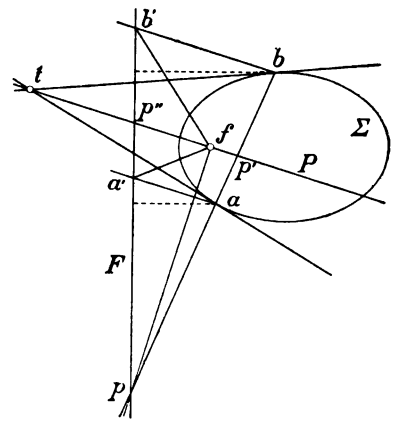
Polára ohniska sluje řídící přímkou kuželosečky. Poněvadž ohnisko jest na hlavní ose, prochází řídící přímka pólem hlavní osy t. j. jest na ni kolma; řídící přímka jest, jakožto polára vnitřního bodu, nesečnou. Ellipsa a hyperbola mají dvě, parabola jednu řídící přímku.

Budiž (obr. 108.) f ohnisko, F jeho polára a buďto a, b dva libovolné body kuželosečky, p průsečík přímky $\overline{ab}$ s F, a t její pól.

Bod p jest na přímkách $\overline{ab}$, F, jichž póly jsou t, f; jest tedy $\overline{ft}$ polára P bodu p, přímky $\overline{ft}$, $\overline{fp}$ reciproké poláry ohniskem procházející, a tudíž $\overline{ft}$ kolmá na $\overline{fp}$.

Značíme-li p' průsečík přímek P a $\overline{ab}$, jsou p, p', a, b harmonické body, a tedy $\overline{fp}$, $\overline{fp'}$, $\overline{fa}$, $\overline{fb}$ harmonické paprsky; první dva jsou k sobě kolmy a rozpolují tudíž úhly přímek $\overline{fa}$, $\overline{fb}$, to jest $\hat{aft} = \hat{bft}$. Rovností $\hat{aft} = \hat{bft}$ dokázána věta:

Obr. 108.



Spojíme-li ohnisko kuželosečky s dotyčnými body dvou tečen a s jich průsečíkem, uzavírá poslední spojnice stejné úhly s prvními dvěma.

Veďme $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$ rovnoběžně s $\overline{ft}$, pak jsou p, p'', a', b' též harmonické body jakožto průměty harmonických bodů p, p', a, b; promítnuvše je z f, vidíme, že $\overline{fp}$, $\overline{fp'}$ rozpolují také úhly paprsků $\overline{fa'}$, $\overline{fb'}$, to jest $\hat{a'ft} = \hat{b'ft}$.

Trojúhelníky $\triangle a'af$, $\triangle b'bf$ mají stejné úhly a jsou si podobny, z čehož $\overline{fa} : \overline{aa'} = \overline{fb} : \overline{bb'}$; avšak délky $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$ jsou úměrny kolmicím $\overline{aa''}$, $\overline{bb''}$ spuštěným s bodů a, b na F, čímž

$$\overline{fa} : \overline{aa''} = \overline{fb} : \overline{bb''}$$

t. j. *poměr vzdáleností libovolného bodu kuželosečky od ohniska a od příslušné řídící přímky jest stálý.*

Při parabole jest tento stálý poměr jednicí, poněvadž jest vrchol v půli mezi ohniskem a jeho polárou; *každý bod paraboly jest tedy od ohniska a od řídící přímky stejně vzdálen.*

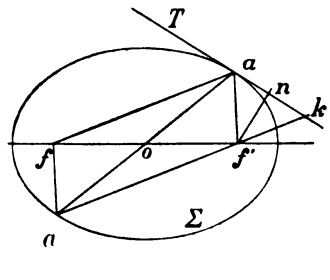
Pro ellipsu a hyperbolu jest tento stálý poměr týž pro obě ohniska, jakož ze symmetrie čáry vychází. Jsou-li r, d vzdálenosti bodu čáry od ohniska a od jeho poláry, a r', d' vzdálenosti jeho od druhého ohniska a jeho poláry, máme tedy

$$\frac{r}{d} = \frac{r'}{d'} = \frac{r \pm r'}{d \pm d'} = \text{stálé.}$$

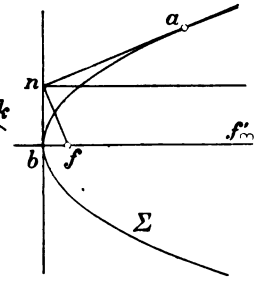
U ellipsy jest ale $d + d'$ patrně součet vzdáleností obou řídících přímek a tedy stálý, pročež i $r + r'$ stálou hodnotou; u hyperboly jest $d—d'$ vzdáleností obou řídících přímek a tedy tento rozdíl stálý, pročež i $r — r'$ stálý to jest *u ellipsy jest součet vzdálenosti bodu čáry od ohnisek stálý, u hyperboly rozdíl; stálý*; *ten součet resp. rozdíl se patrně rovná hlavní ose.*

Koncové body kolmic spuštěných s ohniska na tečny ellipsy neb hyperboly jsou na kružnici, opsané nad hlavní osou; u paraboly jsou tyto koncové body na vrcholové tečně.

Obr. 109.



Obr. 110.



Budiž a libovolný bod ellipsy (obr. 109.), T tečna v něm, f, f' ohniska, $\overline{fn}$ kolmice k T. Průměry $\overline{aa'}$ a $\overline{ff'}$ jsou uhlopříčné rovnoběžníku. Tečna T rozpoluje úhly průvodičů $\overline{af}$, $\overline{af'}$ a mají tedy pravoúhlé trojúhelníky $\triangle anf$, $\triangle knf$ stejné úhly; jsou

vzhledem k společné straně $\overline{nf}$ shodny a tedy $\overline{an} = \overline{nk}$. Avšak $\overline{ao} = \overline{oa'}$, z čehož soudíme, že $\overline{on}$ jest rovnoběžka s $\overline{a'k}$ a tedy

$$\overline{on} = \tfrac{1}{2}\overline{a'k} = \tfrac{1}{2}(\overline{a'f} + \overline{fk}) = \tfrac{1}{2}(\overline{af'} + \overline{af}),$$

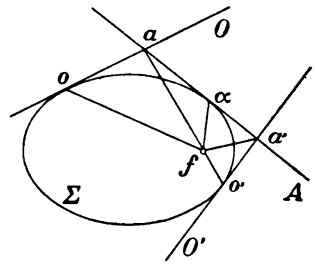
to jest $\overline{on}$ se rovná polovině hlavní osy, čímž věta dokázána.

Při parabole (obr. 110.) buď b vrchol, a libovolný bod a n průsečík jeho tečny s vrcholovou tečnou. Spojíme-li n s ohnisky f, f'_∞, z nichž druhé jest v nekonečnu, obdržíme dle věty čl. předchozího stejné úhly $\hat{bnf} = \hat{anf}_\infty$, z čehož soudíme, že $\overline{fn}$ jest kolma na $\overline{na}$, čímž věta dokázána.

Z první věty tohoto článku plyne zajímavá vlastnost ohnisek.

Jsou-li O, O' dvě pevné tečny kuželosečky (obr. 111.), A libovolná její tečna a f ohnisko, máme dle citované věty

Obr. 111.



$$\hat{ofa} = \hat{afa}, \quad \hat{o'fa'} = \hat{a'fa}$$

a tedy sečtením

$$\hat{ofa} + \hat{o'fa'} = \hat{afa'}.$$

Poněvadž součet úhlů na levo a úhlů na pravo se rovná $\hat{ofo'}$, soudíme, že $\hat{afa'} = \tfrac{1}{2}\hat{ofo'}$ jest úhel stálý, nechť jest A kterákoli tečna. Tím ale dokázána věta:

Řady stanovené pohyblivou tečnou kuželosečky na dvou pevných tečnách se promítají z ohniska dvěma shodnými souběžnými svazky.

93. Imaginárné body kruhové v nekonečnu.

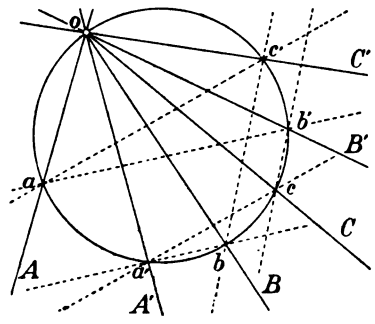
Veškeré kružnice roviny protínají její nekonečně vzdálenou přímku v týchž dvou konjugovaných imaginárných bodech, jež slují imaginárné body kruhové v nekonečnu; všecky kružnice indukují na nekonečně vzdálené přímce patrně touž involuci elliptickou, jejíž imaginárné samodružné body i, j jsou průsečíky každé kružnice s přímkou v nekonečnu. Involuce ta se promítá z libovolného bodu o involucí paprskovou pravoúhlou, totiž involucí sdružených průměrů kružnice o středu o; *spojnice* $\overline{oi}$, $\overline{oj}$ *jsou imaginárné samodružné paprsky pravoúhlé involuce a slují isotropickými přímkami bodem o procházejícími.* Přímky $\overline{oi}$, $\overline{oj}$ spojujíce pól o s průsečíky i, j jeho poláry O_∞ a kružnice, jsou tečnami kružnice v bodech i, j t. j. asymptotami kružnice. Soustředné kružnice jsou svazkem kuželoseček o dvou společných bodech i, j a tečnách v nich $\overline{oi}$, $\overline{oj}$. *Nekonečně vzdálené body dvou kolmých přímek od-*

dělují harmonicky imaginárné body kruhové a naopak; body ty tvoří totiž pár involuce indukované kružnicí na přímce v nekonečnu. Tím získána projektivná definice kolmosti, již možno také tak vyřknouti, že *kolmé přímky jsou přímky harmonické k přímkám isotropickým, procházejícím jich průsečíkem.*

Každá kuželosečka procházející imaginárnými body kruhovými v nekonečnu jest kružnicí; ona indukuje na přímce O_∞ involuci o samodružných bodech i, j, t. j. involuce sdružených průměrů jest pravoúhlá a tedy kuželosečka kružnicí (čl. 88.). Kružnice procházejíc body i, j jest stanovena třemi body a, b, c a lze ji dle návodu čl. 72. sestrojiti; konstrukce ta ukazuje, že polára P bodu p_∞ přímky $\overline{ab}$ prochází půlícím bodem této přímky jsouc k ní kolma, a že tedy na spojnici $\overline{cp_\infty}$ t. j. na kolmici k poláře se nalézá další bod kružnice c' symetrický k c vzhledem k P. Toť ale známá konstrukce dalšího bodu kružnice, dané třemi body.

Samodružné paprsky dvou soumístných shodných a souběžných svazků jsou isotropické přímky procházející vrcholem svazků a naopak.

Obr. 112.



Jsou-li $ABC\ldots\pi\ A'B'C'\ldots$. dva shodné a souběžné svazky o vrcholu o (obr. 112.), a protne-li je kružnice vrcholem vedená v křivých řadách $abc\ldots\pi\ a'b'c'\ldots$, jsou body $(\overline{ab'}, \overline{a'b})$, $(\overline{ac'}, \overline{a'c})$, .. v nekonečnu t. j. direkční osa Δ křivých řad jest přímka v nekonečnu. Úhly (AA'), (BB'), (CC'),.. jsou totiž stejné a tedy také oblouky aa', bb', cc', .., z čehož jde rovnoběžnost přímek $\overline{ab'}$, $\overline{a'b}$, pak $\overline{ac'}$, $\overline{a'c}$, atd. Průsečné body i, j direkční osy Δ s kružnicí jsou samodružné body křivých řad a tedy isotropické přímky $\overline{oi}$, $\overline{oj}$ samodružné paprsky daných shodných svazků.

A naopak, jsou-li isotropické přímky $\overline{oi}$, $\overline{oj}$ samodružnými paprsky dvou projektivných svazků o vrcholu o, jsou i, j, samodružné body křivých řad, v nichž svazky protínají kružnici, vedenou vrcholem o, a tedy jest přímka v nekonečnu jich direkční osou. Jsou tedy ab', $a'b$ rovnoběžné přímky a tedy se oblouk aa' rovná oblouku bb' a obdobně též oblouku cc' atd., z čehož shodnost a souběžnost daných svazků patrna.

94. Ohniska, konfokálné kuželosečky.

Ohnisko jest bod, v němž kuželosečka indukuje pravoúhlou involuci, samodružné její paprsky jsou tečny, z čehož patrno, že *ohnisko jest bod, jímž procházejí isotropické tečny kuželosečky* t. j. tečny procházející bodem i neb j.

Budiž dána ellipsa neb hyperbola a označme imaginárné tečny její bodem i procházející I, I' a tečny bodem j procházející J, J'; jsou tedy I, I', J, J' isotropické tečny kuželosečky a čtyři body (IJ), (IJ'), $(I'J)$, $(I'J')$ ohniska její. Poněvadž j jest imaginárný konjugovaný bod k i, jsou J, J' přímky imaginárné konjugované k I, I', řekněme J k I a J' k I'. Průsečíky (IJ), $(I'J')$ jsou tedy reálné, body (IJ'), $(I'J)$ ovšem imaginárné.

Imaginárné přímky I, I', J, J' tvoří čtyrstran kuželosečce opsaný, jenž má tři páry protějších rohů i, j; (IJ), $(I'J')$; (IJ'), $(I'J)$. Poslední čtyři rohy, jež označíme f, f', f'', f''' jsou ohniska kuželosečky. Diagonálné strany $\overline{ij}$, $\overline{ff'}$, $\overline{f''f'''}$ tvoří polárný trojstran, jehož první strana $\overline{ij}$ jest přímka v nekonečnu; strana $\overline{ff'}$ spojujíc dva reálné body f, f' jest reálná a strana $\overline{f''f'''}$ spojujíc dva konjugované imaginárné body (IJ') a $(I'J)$ jest také reálná.

Průsečík přímek $\overline{ff'}$, $\overline{f''f'''}$ jest diagonálný roh protější diagonálné straně $\overline{ij}$, a tedy jejím pólem, t. j. středem kuželosečky. Diagonálné strany $\overline{ff'}$, $\overline{f''f'''}$ jsou ovšem reciproké poláry a stanoví mimo to na přímce $\overline{ij}$ dva body harmonické k i, j, t. j. $\overline{ff'}$, $\overline{f''f'''}$ jsou dva sdružené a kolmé průměry čili osy kuželosečky.

Má tedy ellipsa i hyperbola čtyři ohniska, dvě reálná na jedné ose, a dvě sdruženě imaginárná na druhé.

Poslední úloha v čl. 78. řešená podává konstrukci ohnisek ellipsy neb hyperboly, rozumíme-li body v onom článku i, j označenými imaginárné body kruhové v nekonečnu.

Při parabole jest přímka v nekonečnu $\overline{ij}$ tečnou, a prochází tedy mimo ni bodem i ještě jedna ovšem imaginárná tečna I, bodem j též jedna imaginárná tečna J; tečny I', J' splývají s nekonečně vzdálenou přímkou a jich průsečík $f'_\infty \equiv (I'J')$ s dotyčným bodem této přímky. *Reálný průsečík f konjugovaných imaginárných tečen I, J jest jediným vlastním ohniskem paraboly*, to jest bodem, v němž parabola indukuje pravoúhlou involuci. Bod f' lze pokládati za ohnisko druhé v tom smyslu, že tečny jím procházející probíhají body i, j, stotožňují se totiž s přímkou v nekonečnu; involuce v f' indukovaná není pravo-

úhlá, ba ani elliptická, nýbrž parabolická, tedy involuce zvrhlá (čl. 66.). *Ohnisko f jest na ose ff'∞ paraboly.* Spojnice $\overline{i'j'}$ imaginárných dotyčných bodů i', j' tečen I, J jest totiž pólarou F bodu f, t. j. řídící přímkou paraboly, a protne přímku $\overline{ij}$ v bodě p harmonickém k f' vzhledem k i, j; bod p jest na přímkách $\overline{ij}$, F a tedy jeho polára spojnicí pólů f' a f těchto přímek, čímž poznáváme čtyři body p, p', i', j' jako harmonické, značíce p' bod této poláry $\overline{ff'}$, a jsou tedy také jejich průměty p, f', i, j z bodu f stanovené harmonické. Přímka $\overline{ff'}$ protne parabolu ve vrcholu v, poněvadž tečna v bodě v prochází pólem p a jest tedy kolma k přímce $\overline{ff'}$; přímka $\overline{ff'}$ spojujíc vrchol v s nekonečně vzdáleným bodem f' paraboly jest její osou.

Úkol, *sestrojiti kuželosečku danou ohniskem f a třemi tečnami* jest totožný s úkolem řešeným v čl. 72., kdy byly dány tři reálné tečny A, B, C a dvě imaginárné jakožto samodružné paprsky elliptické involuce; tato involuce jest nyní o vrcholu f a pravoúhlá.

Úkol, *sestrojiti kuželosečku danou ohniskem f a třemi body* jest totožný s úkolem řešeným v čl. 85.; kuželosečka jest stanovena třemi body a, b, c a dvěma imaginárnými tečnami isotropickými $\overline{fi}$, $\overline{fj}$ a konstrukce cit. článku potrvá v platnosti, jakož tam již bylo výslovně podotknuto. Body m, n, l. c. se vyskytující, jsou nyní na paprscích $\overline{fm}$, $\overline{fn}$ oddělujících harmonicky jak $\overline{fa}$, $\overline{fb}$ tak $\overline{fi}$, $\overline{fj}$, to jest na kolmých paprscích harmonických k $\overline{fa}$, $\overline{fb}$, čili na přímkách rozpolujících úhly těchto paprsků. Z toho ale patrno, že úkol má čtyři reálná řešení, jež dle cit. článku sestrojíme.

Úkol, *sestrojiti kuželosečku, danou dvěma ohnisky a jednou tečnou* jest již řešen v čl. 74., béřeme-li za elliptické involuce tam uvažované dvě involuce pravoúhlé.

Dána-li dvě ohniska f, f' kuželosečky, dány tím čtyři imaginárné tečny, totiž $\overline{fi}$, $\overline{fj}$, $\overline{f'i}$, $\overline{f'j}$. *Kuželosečky o týchž ohniskách f, f' čili konfokálné jsou tedy řadou kuželoseček vepsaných do základného čtyřstranu* $\overline{fi}$, $\overline{fj}$, $\overline{f'i}$, $\overline{f'j}$; kuželosečky ty mají ještě dvě společná ohniska, totiž další dva rohy tohoto úplného čtyrstranu: $(\overline{fi}\ \overline{f'j})$, $(\overline{fj}\ \overline{f'i})$. Věty o řadě kuželoseček odvozené podávají nyní tyto speciálné výsledky.

Každým bodem a procházejí dvě konfokálné kuželosečky. Tečny vedené jím ke kuželosečkám konfokálným tvoří páry involuce; zvrhlé čáry i, j a f, f' podávají dva páry její, a samodružné paprsky, t. j. tečny konfokálných čar bodem a procháze-

jících, oddělují harmonicky $\overline{ai}$, $\overline{aj}$ a $\overline{af}$, $\overline{af'}$. Jsou tedy tečny ty k sobě kolmy a rozpolují úhly průvodičů $\overline{af}$, $\overline{af'}$ t. j. *tečna a normála rozpolují spojnice dotyčného bodu s ohnisky.* Věta patrně potrvá i při parabole v platnosti. — Póly libovolné přímky P vzhledem ke kuželosečkám konfokálným naplňují přímku P' kolmou k P; jest totiž pól přímky P vzhledem k zvrhlé čáře i, j naší řady bod harmonický k bodu nekonečně vzdálenému přímky P a to vzhledem k bodům i, j.

95. Oskulační kružnice kuželosečky.

Kružnice vedené dvěma body a, b tvoří svazek kuželoseček o základných bodech a, b, i, j, značí-li i, j stále imaginárné body kruhové v nekonečnu. Jsou-li body a, b na kuželosečce Π, protne kružnice jimi vedená čáru Π ve dvou sdružených bodech c, d, involuce, jejíž střed jest na přímce $\overline{ij}$ (čl. 83.), t. j. spojnice bodů c, d má pevný směr. Přímky $\overline{ab}$ a $\overline{cd}$ jsou k ose kuželosečky stejně nakloněny, poněvadž platí věta:

Protne-li kružnice kuželosečku ve čtyřech bodech, tvoří tyto úplný čtyrroh, jehož protější strany jsou k ose kuželosečky stejně nakloněny.

Buďte a, b, c, d body společné kuželosečce Π a kružnici K, a $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ dvě protější strany čtyrrohu $abcd$. Svazek kuželoseček těmito čtyřmi body vedených protne přímku nekonečně vzdálenou O_∞ v involuci, do níž náležejí páry p, p'; i, j; m, m', značíme-li p, p' průsečíky čáry Π s O_∞, a m, m' nekonečně vzdálené body přímek $\overline{ab}$, $\overline{cd}$. Značí-li dále r, s nekonečně vzdálené body os kuželosečky Π, jsou r, s, i, j harmonické, poněvadž osy uzavírají pravý úhel (čl. 93.), a r, s, p, p' jsou harmonické, poněvadž osy procházejí dvěma sdruženými póly r, s. Body r, s oddělujíce harmonicky dva páry involuce na O_∞ položené, jsou jejími dvojnými body, a oddělují harmonicky také třetí pár m, m'; promítneme-li harmonické body r, s, m, m' na př. ze středu kuželosečky, vidíme, že osy rozpolují úhly přímek rovnoběžných s $\overline{ab}$, $\overline{cd}$, čímž věta dokázána.

Zvolme na kuželosečce Π dva nekonečně blízké body a, b, a veďme jimi kružnici, která nechť protne Π v bodech c, d; pak spojnice $\overline{cd}$ jest k ose stejně nakloněna jako $\overline{ab}$, t. j. jako tečna v bodě a, nejsouc s ní rovnoběžna. Splyne-li bod c s bodem a, jest kružnice oskulující v bodě a, čímž získána tato konstrukce oskulační kružnice v bodě a.

Sestrojme tečnu v bodě a a veďme tímto bodem přímku P, jež jest k osám stejně nakloněna jako tečna; P protne kuželosečku v bodě d, jímž prochází oskulační kružnice bodu a. Kružnice ta jest body a, d a tečnou v bodě a stanovena.

96. Homothetické kuželosečky.

Dvě homothetické kuželosečky v rovině, t. j. podobné a tak položené, že korrespondující přímky jsou rovnoběžny, *procházejí týmiž dvěma body v nekonečnu*; páry jejich sdružených průměrů jsou totiž rovnoběžny a indukují tudíž obě čáry na přímce nekonečně vzdálené touž involuci, jejíž samodružnými body procházejí obě kuželosečky. A naopak, procházejí-li dvě kuželosečky Σ, Σ' týmiž dvěma body v nekonečnu, indukují na přímce v nekonečnu touž involuci; promítneme-li tuto involuci z jich středů, obdržíme involuci jich sdružených průměrů, jichž páry jsou tudíž rovnoběžné. Z toho ale plyne u ellips vždy homothetičnost, u hyperbol za jisté dodatečné supposice. Jsou-li kuželosečky ellipsami Σ, Σ' a $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ dva sdružené průměry ellipsy Σ, jsou průměry $\overline{a'b'}$, $\overline{c'd'}$ v druhé ellipse rovnoběžně vedené též sdruženými. Ellipsa podobná a podobně položená se Σ o průměru $\overline{a'b'}$ jest totožna se Σ'; ona patrně indukuje na přímce v nekonečnu touž involuci jako Σ', prochází tedy týmiž dvěma body v nekonečnu a má, tak jako Σ', v bodech a', b' tečny rovnoběžné s $\overline{c'd'}$.

Jsou-li kuželosečky Σ, Σ' hyperboly, jsou jich asymptoty rovnoběžny, a ovšem opět též rovnoběžny jich páry sdružených průměrů. Je-li $\overline{ab}$ reálný průměr čáry Σ a $\overline{cd}$ jemu přidružený laterálný, jsou hyperboly Σ a Σ' homothetické, jestliže rovnoběžný průměr $\overline{a'b'}$ v Σ' jest též reálný; lze pak předchozí úvahu do slova applikovati.

Úkol, *vésti třemi* body a, b, c *kuželosečku homothetickou s danou kuželosečkou* Σ — ellipsou neb hyperbolou — jest tedy totožný se strojením kuželosečky z pěti bodů a, b, c, m, n, značíme-li m, n nekonečně vzdálené body čáry Σ. Obdobně jest úkol, *strojiti kuželosečku homothetickou s kuželosečkou* Σ *procházející dvěma body* a, b *a dotýkající se dané přímky* P, totožný s úkolem vésti body a, b, m, n kuželosečku, jež se dotýká dané přímky P.

Kapitola XI.

Přímočaré plochy vznikající projektivnými útvary základnými.

97. Soustava plošných přímek.

V předchozích kapitolách jsme uvažovali o čarách a kuželích vznikajících dvěma projektivnými řadami, neb svazky, neb svazky rovin a sice tak, že spojnice sdružených bodů řad neb průsečík sdružených paprsků neb jich rovina aneb konečně paprsek společný sdruženým rovinám byl vytvořeným elementem, naplňujícím vznikající čáru neb plochu. Přihlédněme ke všem případům v té příčině vůbec možným.

Sdružené body projektivných řad vytvoří paprsek: jich spojnici; případ, kdy řady jsou v jedné rovině, vyšetřen, zbývá případ, kdy jsou řady mimoběžné.

Sdružené elementy řady $abc\ldots$ projektivné se svazkem $ABC\ldots$ vytvořují roviny procházející vrcholem svazku, totiž roviny (aA), (bB), (cC), ... Roviny ty se dotýkají kužele druhého řádu, neboť jejich stopy na libovolné rovině ϱ vedené řadou jsou spojnice $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$, $\overline{cc'}\ldots$, značí-li $a'b'c'\ldots$ řadu, v niž ϱ protne daný svazek.

Řada projektivná se svazkem rovin nedává vzniku žádnému útvaru, poněvadž bod s rovinou nevytvořuje žádný nový element.

Svazek se svazkem projektivným o témž vrcholu a v různých rovinách vytvořují kužel druhého řádu, jakož bylo ve čl. 58. vyloženo; v téže rovině a o různých vrcholech vytvořují kuželosečku; jsou-li konečně svazky v různých rovinách a o různých vrcholech, nedávají vznik žádnému novému útvaru, poněvadž dva paprsky mimoběžné nevytvořují žádný nový element.

Svazek se svazkem rovin projektivným vytvořují kuželosečku; každý paprsek svazku protne totiž příslušnou rovinu v bodě této kuželosečky. Touž čáru vytvoří daný svazek patrně se svazkem paprskovým, v němž rovina daného svazku protíná svazek rovin.

Dva projektivné svazky rovin, jichž osy se protínají, vytvoří kužel druhého řádu, jakož v čl. 58. bylo vyloženo; zbývá tedy přihlédnouti k případu, kdy se jejich osy neprotínají.

Nové útvary vznikají tedy jen dvěma projektivnými řadami na mimoběžných přímkách, a dvěma projektivnými svazky rovin na mimoběžných osách.

Dvě projektivné řady $abc..\ \pi\ a'b'c'..$ na mimoběžných přímkách O, O' vytvoří soustavu přímek $A, B, C, ..$, totiž spojnic $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$, $\overline{cc'}, ..$ sdružených bodů, kterou nazveme *soustavou plošných přímek* Σ; naplňují totiž tyto přímky jistou křivou plochu, jakož z toho patrno, že žádné dvě nejsou v jedné rovině, neboť by jinak byly dva body přímky O s dvěma body přímky O' v jedné rovině, a tedy O a O' v jedné rovině, proti supposici. Tuto křivou plochu nazveme *přímočarou plochou druhého stupně.*

Přímočarou plochu druhého stupně lze vytvořiti ještě druhou soustavou Ω plošných přímek. Každá přímka jedné soustavy protíná každou přímku druhé soustavy, kdežto nejsou žádné dvě přímky téže soustavy v jedné rovině.

Každým bodem přímky jedné soustavy prochází jedna přímka druhé soustavy; a každá rovina, vedená přímkou jedné soustavy, obsahuje jednu přímku druhé soustavy.

Jsou-li totiž A, B, C tři libovolné přímky soustavy Σ, stanovme přímku O'' protínající tyto tři přímky; takovou přímku lze vésti libovolným bodem x přímky A a ona se pak jeví jakožto průsečnice rovin (xB), (xC), aneb lze ji sestrojiti v libovolné rovině ξ přímkou A vedené, a pak se jeví jakožto spojnice bodů (ξB), (ξC).

Promítáme-li nyní řady $abc..\ \pi\ a'b'c'..$ z osy O'', obdržíme dva projektivné soumístné svazky rovin s třemi samodružnými rovinami $(aO'') \equiv (a'O'')$, $(bO'') \equiv (b'O'')$, $(cO'') \equiv (c'O'')$, a jsou tedy všecky roviny samodružné (čl. 23.), to jest každé dva sdružené body řad O a O' jsou s osou O'' v jedné rovině, to jest každá přímka soustavy Σ protíná přímku O''; jest tedy O'' plošnou přímkou přímočaré plochy naplněné soustavou Σ.

Soustava Ω plošných přímek $OO'O''..$ se skládá ze všech přímek protínajících tři přímky soustavy Σ, a soustava Σ se skládá ze všech přímek protínajících tři přímky soustavy Ω.

Každá přímka jedné soustavy proto sluje *řídící přímkou* soustavy druhé, a taktéž každá soustava *řídící soustavou* druhé.

Přímočará plocha druhého stupně tedy vzniká dvojím způsobem pohybem přímky šinoucí se podél tří pevných přímek mimoběžek. Tyto tři pevné přímky jsou řídícími přímkami soustavy plošných přímek, kterou naplňuje pohyblivá přímka.

Každým bodem řídící přímky prochází pohyblivá přímka jednou, a do každé roviny, vedené řídící přímkou, zapadá pohyblivá přímka jednou.

Dva projektivné svazky rovin $\alpha\beta\gamma\,..\,\pi\,\alpha'\beta'\gamma'\,..$ na mimoběžných osách O, O' vytvořují též soustavu plošných přímek A, B, C,.. totiž průsečnic $\overline{a\alpha'}$, $\overline{\beta\beta'}$, $\overline{\gamma\gamma'}$..; protíná-li přímku O svazek $\alpha'\beta'\gamma'\,..$ v řadě $abc\,..$, a přímku O' svazek $\alpha\beta\gamma\,..$ v řadě $a'b'c'\,..$, jsou tyto řady projektivné a vytvoří touž soustavu přímek $ABC\,..$

98. Projektivnost soustavy plošných přímek.

Soustavu plošných přímek protínají každé dvě řídící přímky v projektivných řadách.

Soustava plošných přímek se promítá z každých dvou řídících přímek projektivnými svazky rovin.

Buďte O, O', O'' tři řídící přímky dané soustavy plošných přímek. Libovolnou přímku soustavy obdržíme, volivše bod x na O'', jakožto průsečnici rovin (xO), (xO'), jež na osách O a O' vytvoří dva projektivné svazky rovin, t. současně perspektivné s řadou bodů x na O''; promítají se tedy přímky soustavy z řídících přímek O, O' skutečně dvěma projektivnými svazky rovin.

Libovolnou přímku soustavy však také obdržíme, vedeme-li přímkou O'' rovinu ξ, jakožto spojnici průsečíků (ξO), $(\xi O')$, jež na osách O a O' si patrně přísluší projektivně, majíce perspektivnou polohu k téže rovině ξ svazku rovin na O''. Protínají tedy přímky soustavy obě řídící přímky O, O' v projektivně sdružených bodech.

Řada, v níž řídící přímka protíná soustavu plošných přímek, jest projektivná se svazkem rovin, jímž se promítá táž soustava z jiné aneb i z téže řídící přímky.

Svazek rovin, jímž se soustava promítá z řídící přímky O, protne O' patrně v řadě, v níž tuto přímku protíná soustava plošných přímek, a jsou tedy svazek rovin a řada perspektivnými. Řada tato jest ale projektivna s řadou stanovenou soustavou na O, a tedy jest také tato řada se svazkem rovin na téže ose projektivná.

Soustavu plošných přímek nazýváme projektivnou s nějakým útvarem, jest-li s ním projektivná řada, v níž soustavu protíná řídící přímka, aneb svazek rovin, jímž se soustava promítá z řídící přímky.

Dvojpoměrem čtyř přímek A, B, C, D soustavy rozumíme dvojpoměr bodů a, b, c, d, v nichž je protíná řídící přímka, aneb dvojpoměr rovin $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, jimiž se promítají z řídící přímky; speciálně nazýváme čtyři přímky soustavy A, B, C, D harmonickými, jsou-li tyto roviny aneb ony body harmonické.

Je-li dána soustava plošných přímek třemi elementy A, B, C a jde-li o čtvrtý harmonický paprsek D její, sestrojme k A, B, C tři transversály O, O', O'', z nichž první nechť protne A, B, C resp. v bodech a, b, c, a budiž d čtvrtý harmonický bod k těmto třem; jím vedená transversála D k řídícím přímkám O', O'' jest hledaný harmonický paprsek soustavy.

99. Průsečné body s přímkou a tečné roviny přímočaré plochy druhého stupně.

Libovolná přímka protíná přímočarou plochu druhého stupně obecně ve dvou bodech reálných, různých neb splývajících, aneb ve dvou bodech imaginárných; má-li s ní tři společné body, jest celá na ploše, protínajíc tři plošné přímky téže soustavy.

Buďte na přímočaré ploše O, O', O'' tři přímky téže soustavy a P libovolná přímka. Svazky rovin na osách O, O' promítající řadu O'' vytvořují danou plochu, a protínají P ve dvou soumístných projektivných řadách; samodružné body těchto řad jsou patrně na ploše, čímž věta dokázána a název plochy odůvodněn. Splynou-li samodružné body, jest P tečnou a dotýká se plochy ve splývajících samodružných bodech.

Řady, v nichž svazek rovin na ose O'' protíná přímky O a O', vytvořují taktéž soustavu plošných přímek, a promítají se z P dvěma soumístnými projektivnými svazky rovin; samodružné roviny jejich obsahují po jedné přímce soustavy, protínající P, čímž věta dokázána na novo.

Zároveň tím řešena na dvojí způsob úloha:

Stanoviti transversálu ku čtyřem mimoběžným přímkám O, O', O'', P. Hledaná transversála jest přímkou soustavy stanovené řídícími přímkami O, O', O'' a protínající P; předchozí úvaha ukazuje, že obecně existují dvě transversály, a podává konstrukci jejich bodů na P, resp. rovin, jimiž se promítají z P.

Rovina ϱ, vedená plošnou přímkou A jedné soustavy, prochází též jednou přímkou O druhé soustavy, a nemá mimo ty dvě přímky žádného společného bodu m s plochou; jinak by každá přímka bodem m vedená a protínající A a O ve dvou

bodech měla s plochou tři společné body, náležela by celá ploše, a tedy by celá rovina splývala s plochou, což jest nemožno (čl. 96.). Každá přímka vedená v rovině ϱ bodem (AO) má pouze tento bod společný s plochou, dotýká se tedy plochy v tomto bodě; *rovina (AO) obsahující všecky tyto tečny jest tečnou rovinou plochy v bodě (AO). Každá rovina, vedená plošnou přímkou jest rovinou tečnou; její dotyčný bod jest průsečík této přímky s přímkou plošnou druhé soustavy, obsaženou v rovině. Svazek tečných rovin, vedených plošnou přímkou A, jest projektivný s řadou jich dotyčných bodů*; on jest (čl. 98.) projektivný se soustavou plošných přímek O a tato soustava projektivná s řadou, již stanoví na A.

Libovolnou přímkou P procházejí obecně dvě tečné roviny. Tečná rovina obsahuje jeden paprsek první soustavy a s ním se P protíná; jsou-li tedy a, b průsečíky přímky P s plochou, a A, B paprsky první soustavy jimi procházející, jsou (AP), (BP) tečné roviny přímkou P procházející, z nichž každá ovšem obsahuje též přímku druhé soustavy bodem a resp. b procházející. Jsou-li a, b imaginárné, jsou i tečné roviny imaginárné, splývají-li a, b, t. j. je-li P tečnou plochy, splynou i tečné roviny; je-li P na ploše, jest každá rovina jí vedená tečnou rovinou.

100. Řezy s rovinami, opsané plochy kuželové, polárná rovina a pól.

Přímočarou plochu druhého stupně vytvoříme dvěma projektivnými svazky rovin, a protněme svazky libovolnou rovinou; v rovině té vzniknou dva projektivné svazky paprskové, jichž sdružené paprsky se protínají v bodech plochy, neboť jimi procházejí průsečnice sdružených rovin, t. j. plošné přímky. Vytvoříme-li plochu dvěma projektivnými řadami, a promítneme-li tyto z libovolného bodu, obdržíme dva projektivné svazky paprskové; rovina vedená dvěma sdruženými paprsky jest tečnou rovinou kužele druhého řádu, a prochází plošnou přímkou dané plochy. Tím dokázána první část vět:

Soustavu plošných přímek protíná rovina ϱ, neprocházející žádnou přímkou soustavy, v kuželosečce Σ.

Soustava plošných přímek se promítá z libovolného bodu r, jenž není na žádné přímce soustavy, tečnými rovinami kužele druhého řádu K.

Tečné roviny plochy přímočaré sestrojené v bodech této kuželosečky jsou tečnými rovinami kužele druhého řádu.

Body, v nichž se promítající roviny dotýkají přímočaré plochy, jsou na kuželosečce.

Buďte A, B, C tři přímky soustavy a a, b, c dotyčné body rovin (rA), (rB), (rC) s danou přímočarou plochou, naplněnou soustavou. Rovina (abc) protne jak kužel K, tak přímočarou plochu v kuželosečce, procházející body a, b, c a dotýkající se v těchto bodech resp. týchž přímek; tím věta na pravo dokázána.

Jsou-li a, b, c průsečíky roviny ϱ s třemi přímkami A, B, C dané soustavy, sestrojme v těchto bodech tečné roviny α, β, γ dané přímočaré plochy, a veďme jich společným bodem $(\alpha\beta\gamma)$ a všemi dalšími přímkami soustavy roviny; roviny ty se dotýkají kužele druhého řádu, jehož stopa na ϱ jest kuželosečka, procházející body a, b, c a dotýkající se v nich čáry Σ, čímž věta na levo dokázána.

Přihlížejíce k větě po levé straně, jest patrno, že body kuželosečky Σ tvoří bodovou řadu projektivnou s oběma svazky rovin soustavu vytvořujícími, a tedy i projektivnou se soustavou plošných přímek; a na pravo tvoří patrně tečné roviny kužele K útvar projektivný s oběma řadami soustavu vytvořujícími, a tedy také se soustavou plošných přímek.

Rovina čáry Σ, podle níž se dotýká přímočaré plochy kužel opsaný z bodu r, sluje polárnou rovinou bodu r, a tento bod sluje pólem oné roviny. Protne-li libovolná rovina, pólem vedená, plochu v kuželosečce Π, jsou dotyčné body tečen k této čáře bodem r vedených na Σ, a jest tedy polára bodu r vzhledem k Π v rovině polárné tohoto bodu. Tím se jeví rovina polárná bodu r jakožto geometrické místo polár tohoto bodu vzhledem k čarám, v nichž protínají plochu roviny vedené pólem r, a z toho jde ihned, že polárná rovina obsahuje všecky body harmonické k pólu r vzhledem k bodům plochy na sečnách pólem vedených.

Každé rovině náleží pól; jest to vrchol kužele opsaného ploše podél kuželosečky, v níž rovina plochu protíná.

Je-li pól na ploše, jsou tečné roviny jím vedené, roviny procházejí buď přímkou jedné, neb přímkou druhé soustavy pólem procházející; jich dotyčné body jsou na této přímce, a souhrn těchto bodů tedy v rovině oběma přímkami vedené, t. j. v tečné rovině. Jest tedy polárná rovina bodu plochy jeho rovina tečná.

101. Jednoplochý hyperboloid a hyperbolický paraboloid.

Přímočará plocha druhého stupně v předchozím uvažovaná sluje *jednoplochým hyperboloidem*, není-li žádná její plošná přímka v nekonečnu, protíná-li ji tedy rovina nekonečně vzdálená v kuželosečce; plocha sluje *hyperboloickým paraboloidem*, nalézá-li se v jedné její plošné soustavě a tedy také v druhé přímka nekonečně vzdálená, v kterémž případě nekonečně vzdálená rovina se dotýká plochy, protínajíc ji ve dvou přímkách.

Soustava plošných přímek hyperbolického paraboloidu protíná každé dvě přímky druhé soustavy v řadách podobných, neboť nekonečně vzdálená přímka soustavy stanoví nekonečně vzdálené body jakožto příslušné vznikajících řad projektivných. A naopak dvě podobné řady na mimoběžkách položené vytvořují hyperbolický paraboloid.

Hyperbolický paraboloid jest stanoven třemi mimoběžkami A_∞, B, C, z nichž jedna A_∞ jest v nekonečnu v dané rovině ϱ; přímky O', O'',.., protínající A_∞, B, C, t. j. protínající B, C a rovnoběžné s ϱ, naplňují tento hyperbolický paraboloid. Rovina ϱ, s níž jsou rovnoběžny všecky přímky jedné soustavy, sluje *řídící rovinou* plochy.

Nekonečně vzdálená rovina obsahuje mimo A_∞ ještě jednu přímku O_∞ plochy, náležející do soustavy O', O'',..; ji protínají všecky přímky A_∞, B, C.., to jest všecky přímky B, C,.. jsou rovnoběžny s jistou rovinou ω. Tato rovina jest *druhou řídící rovinou* plochy. Průsečík přímek A_x, O_∞ jest na průsečnici $\overline{\varrho\omega}$; on jest bodem, v němž se nekonečně vzdálená rovina dotýká plochy.

Bod v, v němž tečná rovina jest kolma ku přímce $\overline{\varrho\omega}$, sluje vrcholem hyperbolického paraboloidu, a přímka jím vedená rovnoběžně s $\overline{\varrho\omega}$ sluje jeho osou. Vedeme-li libovolným bodem přímky $\overline{\varrho\omega}$ k této přímce kolmice a sice jednu v rovině ϱ a druhou v rovině ω, a sestrojíme-li rovnoběžně s první transversálu k B, C, a rovnoběžně s druhou transversálu k O', O'', jsou tyto transversály patrně plošné přímky vrcholem procházející, čímž stanoven vrchol a osa plochy.

Sečná rovina σ, neprocházející žádnou plošnou přímkou hyperbolického paraboloidu, protíná tuto plochu obecně v hyperbole, jejíž nekonečně vzdálené body jsou na $\overline{\sigma\varrho}$ a $\overline{\sigma\omega}$, a jen tehdy v parabole, kdy se tyto body sjednotí, to jest, kdy sečná rovina jest rovnoběžna s přímkou $\overline{\varrho\omega}$, a tedy i s osou plochy.

Jakož již bylo vytčeno, protíná nekonečně vzdálená rovina hyperboloid v kuželosečce, již označme Π. Dle článku předchozího procházejí všecky asymptotické roviny plochy, to jest tečné roviny její, sestrojené v nekonečně vzdálených bodech plochy, jedním bodem o, pólem nekonečně vzdálené roviny. *Pól ten jest středem plochy,* neboť vzhledem k harmonické vlastnosti roviny polárné rozpoluje každou tětivu plochy, jím vedenou. Kužel promítající čáru Π ze středu o jest obalující plochou všech asymptotických rovin a sluje *asymptotickým kuželem hyperboloidu.* Ku každé hraně jeho existuje v každé z obou soustav plošných přímek po jedné rovnoběžné, a rovina jimi procházející se dotýká kužele podél oné hrany; jest to totiž tečná rovina plochy v nekonečně vzdáleném bodě hrany. Zároveň patrno, že rovnoběžky vedené pevným bodem k soustavě plošných přímek hyperboloidu naplňují kužel druhého stupně, shodný s asymptotickým kuželem; při hyperbolickém paraboloidu jsou dvě roviny, rovnoběžné s řídícími rovinami, geometrickým místem těchto rovnoběžek.

Sečná rovina σ, neprocházející žádnou plošnou přímkou hyperboloidu, protíná jej v hyperbole, parabole neb ellipse dle okolnosti, je-li rovnoběžna s dvěma, s jedinou neb s žádnou hranou asymptotického kužele; v prvním případě protíná totiž rovina σ čáru Π ve dvou reálných bodech, v druhém se jí dotýká a v třetím ji neprotne v reálných bodech.

Jde-li o konstrukci středu hyperboloidu, daného třemi mimoběžkami A, B, C, stačí sestrojiti tři asymptotické roviny na př. roviny dotyčné α, β, γ v bodech a_∞, b_∞, c_∞ na daných přímkách položených; rovina α prochází přímkou A a transversálou A' vedenou bodem a_∞ k přímkám B, C, a obdobně sestrojíme β, γ. Společný bod o rovin α, β, γ jest středem hyperboloidu; kužel o vrcholu o, dotýkající se asymptotických rovin α, β, γ podél hran resp. rovnoběžných s A, B, C, jest asymptotickým kuželem hyperboloidu.

Kapitola XII.

Projektivnost útvarů elementárných.

102. Elementárné útvary.

Projektivnými útvary základnými prvního řádu jsme vytvořili pět útvarů druhého řádu, totiž řadu a svazek paprskový druhého řádu (křivou řadu a křivý svazek na kuželosečce), kužel druhého řádu (soustavu jeho hran) a svazek rovin druhého řádu (soustavu tečných rovin kužele), konečně soustavu plošných přímek druhého řádu; zároveň jsme definovali projektivnost těchto útvarů s nějakým jiným útvarem.

Staudt označuje společným názvem *útvarů elementárných* jak základné útvary prvního řádu, tak těchto pět útvarů řádu druhého.

Z definic jich projektivnosti jest patrno, že projektivný vztah dvou elementárných útvarů jest třemi páry sdružených elementů stanoven, a že dva soumístné elementárné útvary mají dva reálné různé neb splývající samodružné, aneb dva imaginárné samodružné elementy, vyjme-li se případ totožnosti, který nastane, jakmile se vyskytnou tři samodružné elementy; konečně, že soumístné projektivné útvary elementárné jsou involutorné, jakmile se vyskytne jeden pár involutorně sdružených elementů, tak že jich involuce jest dvěma páry stanovena.

Projektivným vztahem dvou útvarů elementárných mohou vzniknouti nové útvary právě tak, jako vznikly projektivností základných útvarů útvary druhého řádu. V této kapitole přihlédneme k některým útvarům tímto způsobem vznikajícím, jakož i k perspektivné poloze projektivných útvarů elementárných.

103. Perspektivná poloha útvarů elementárných.

Dva nestejnorodé útvary elementárné jsou perspektivné, nalézá-li se každý element jednoho v projektivně příslušném elementu druhého útvaru.

Řada druhého řádu na př. jest perspektivná s kuželem druhého řádu jí procházejícím, přísluší-li bodu řady onen paprsek kužele, jenž jím prochází; útvary jsou ovšem projektivné dle definice čl. 58.

Svazek druhého řádu, to jest soustavu tečen kuželosečky, protne každá tečna její v řadě perspektivné ke svazku, a reciprokým způsobem se promítá řada druhého řádu z libovolného svého bodu perspektivným svazkem paprskovým; soustava plošných přímek druhého řádu protíná každou řídící přímku v řadě perspektivné, a promítá se z každé řídící přímky svazkem perspektivným. Body kuželosečky tvoří řadu druhého řádu perspektivnou ke svazku jich tečen, a pod.

Že tyto perspektivné útvary jsou projektivné dle definic čl. 49., 58. a 98., jest patrno. V příčině perspektivné polohy útvarů elementárných lze snadno nahlédnouti, *že základný útvar projektivný k útvaru druhého řádu se nalézá s ním v poloze perspektivné, jakmile čtyři elementy jednoho procházejí sdruženými elementy druhého.*

Mějme na př. v rovině řadu druhého řádu na kuželosečce Σ a k ní projektivný svazek paprskový o. Promítneme-li tuto řadu z libovolného bodu jejího o' svazkem s ní perspektivným jest tento projektivný se svazkem o, a oba svazky vytvoří kuželosečku Σ', vrcholy o, o' procházející. Každý společný bod čar Σ a Σ', vyjma o', jest elementem dané křivé řady, jímž prochází projektivně přidružený paprsek svazku o. Kuželosečky Σ a Σ' mají mimo o' (v. Úvod) tři společné body; mají-li čtyři, jsou totožny, a svazek o jest perspektivný k řadě na Σ, jak bylo dokázati. — Nenastane-li tento případ, tu čáry Σ a Σ' buď se ve vrcholu o' dotýkají, neb mají alespoň jeden další společný reálný bod, možná též tři; kuželosečka Σ rozděluje totiž tak jako kružnice rovinu na oblast vnitřních a na oblast vnějších bodů, a v případě, kdy se Σ a Σ' v o' nedotýkají, jest patrno, že čára Σ' přechází bodem o' z jedné oblasti do druhé, a že tedy, vracejíc se jakožto uzavřená čára do východiště, musí kdesi z druhé přestoupiti do první, to jest opět protnouti čáru Σ. Tím nalezena věta, vedle níž klademe bez důkazu větu reciprokou:

Nalézá-li se v rovině křivé řady druhého řádu svazek paprskový s ní projektivný, ale nikoli perspektivný, procházejí nanejvýš tři jeho reálné paprsky svými přidruženými body, a alespoň jeden.

Nalézá-li se v rovině křivého svazku druhého řádu řada s ním projektivná, ale nikoli perspektivná, jsou nanejvýš tři její reálné body na přidružených paprscích, a alespoň jeden.

104. Projektivné útvary elementárné.

Kuželosečkou Σ a dvěma přímkami A, B, jež protínají Σ každá v jednom bodě, však nejsou s ní v jedné rovině, aniž obě v jedné rovině, jest stanovena soustava plošných přímek perspektivná ke křivé řadě Σ a mající A, B za řídící přímky.

Soustavu tu vytvoří totiž svazky rovin na osách A, B perspektivné ku křivé řadě na Σ.

Svazkem rovin druhého řádu a dvěma mimoběžkami A, B, jež se promítají z vrcholu svazku dvěma rovinami jeho, neprocházejíce vrcholem, jest stanovena soustava plošných přímek druhého řádu perspektivná ke svazku a mající A, B za řídící přímky.

Soustavu tu vytvoří totiž řady na A, B perspektivné k danému svazku rovin druhého řádu.

Druhá soustava plošných přímek obsahuje přímky A, B a jest též perspektivná k dané řadě druhého řádu resp. k danému svazku rovin druhého řádu.

Řada a projektivná s ní křivá řada na kuželosečce, jež se protínají, aniž by byly v jedné rovině a jichž společný bod a sobě přísluší, vytvoří soustavu plošných přímek s nimi perspektivnou.

Svazek rovin a projektivný svazek rovin druhého řádu, jež mají společnou rovinu α, aniž by osa prvního svazku procházela vrcholem druhého, a jichž společná rovina sobě přísluší, vytvoří soustavu plošných přímek druhého řádu s nimi perspektivnou.

Volme mimo bod a na kuželosečce dva další body b, c a buďte $a' \equiv a$, b', c' body jim projektivně příslušné v přímé řadě; pak stanoví, dle předchozí věty, kuželosečka a přímky $\overline{bb'}$, $\overline{cc'}$ soustavu plošnou druhého řádu perspektivnou s křivou řadou, do níž náleží $\overline{bb'}$, $\overline{cc'}$ a taktéž perspektivnou s přímou řadou, poněvadž body a', b', c' procházejí příslušné paprsky soustavy.

V příčině důkazu věty na pravé straně volme mimo α ještě dvě roviny β, γ svazku rovin druhého řádu a buďte $\alpha' \equiv \alpha$, β', γ' roviny jim projektivně příslušné ve svazku rovin; pak stanoví, dle předchozí pravé věty, křivý svazek rovin a přímky $\overline{\beta\beta'}$, $\overline{\gamma\gamma'}$ soustavu plošných přímek druhého řádu perspektivnou s křivým svazkem, do níž náleží $\overline{\beta\beta'}$, $\overline{\gamma\gamma'}$, a taktéž perspektivnou s daným svazkem rovin, poněvadž roviny α', β', γ' obsahují příslušné paprsky soustavy.

Promítáme-li z libovolného bodu o kuželosečku, danou ve větě po levé straně, obdržíme kužel druhého řádu, perspektivný ke kuželosečce, a promítneme-li z o vzniklou soustavu plošných přímek, obdržíme svazek rovin druhého řádu aneb — je-li bod o na ploše soustavou naplněné — obyčejný svazek rovin. Roviny (obb'), (occ'), .. tohoto svazku procházejí sdruženými elementy dané řady a kužele, t. j. bodem b' a hranou $\overline{ob}$, bodem c' a hranou $\overline{oc}$ atd. Touto a obdobnou úvahou, vzhledem k větě na pravé straně stojící, vycházejí následující dvě věty:

Přímá řada projektivná s kuželem druhého řádu, jejíž jeden bod se nalézá na příslušné hraně kužele, vytvoří s ním svazek rovin aneb svazek rovin druhého řádu k oběma perspektivný.

Svazek rovin projektivný se svazkem druhého řádu, jehož jedna rovina prochází příslušným paprskem tohoto svazku, vytvoří s ním řadu aneb řadu druhého řádu k oběma perspektivnou.

Při odvození pravé věty nutno svazek rovin druhého řádu, daný v předchozí pravé větě, protnouti rovinou, a připomenouti, že soustavu plošnou druhého řádu rovina protíná v řadě druhého řádu, aneb — prochází-li sečná rovina jednou přímkou soustavy — v řadě přímé.

Protneme-li útvary, v těchto dvou větách se vyskytující, libovolnou rovinou, máme ihned tyto dvě nové věty:

Přímá řada projektivná s křivou řadou na kuželosečce obsažené v jedné rovině, jichž jeden společný bod sobě přísluší, vytvoří buď svazek druhého řádu aneb obyčejný svazek, k oběma perspektivný.

Svazek perspektivný se svazkem druhého řádu, obsažené v jedné rovině, jichž jeden společný paprsek sobě přísluší, vytvoří buď křivou řadu druhého řádu neb přímou řadu, k oběma perspektivnou.

105. Projektivné soustavy plošných přímek, soumístné křivé řady a svazky.

Dvě projektivné soustavy plošných přímek druhého řádu $ABC..\pi A'B'C'..$, z nichž každá jest soustavou řídící druhé, vytvořují řadu druhého řádu k nim perspektivnou a zároveň svazek rovin druhého řádu k nim perspektivný.

Přiřadíme-li libovolnému paprsku první soustavy v druhé onen, jenž se s ním protíná na rovině vedené body (AA'), (BB'), (CC'), jsou soustavy ve vztahu projektivném (čl. 104.);

a vztah ten jest totožný s daným vztahem, jelikož patrně přiřaďuje paprskům A, B, C resp. paprsky A', B', C'.

Přiřadíme-li však libovolnému paprsku první soustavy v druhé onen, jenž s ním stanoví rovinu procházející společným bodem rovin (AA'), (BB'), (CC'), jsou soustavy ve vztahu projektivném (čl. 104.); a vztah ten jest totožný s daným, jelikož opět přiřaďuje paprskům A, B, C paprsky A', B', C'.

Dvě soumístné projektivné řady druhého řádu vytvořují buď svazek druhého řádu k nim perspektivný, aneb procházejí spojnice každých dvou sdružených bodů jedním bodem.

Dva soumístné projektivné svazky druhého řádu buď vytvořují řadu druhého řádu k nim perspektivnou, aneb se protínají každé dva sdružené paprsky na jedné přímce.

Buďte v příčině první věty $abc\,..\,\pi\,a'b'c'\,..$ dvě projektivné křivé řady na kuželosečce Σ. Veďme touto kuželosečkou (čl. 104.) přímočarou plochu druhého řádu a označme A, B, $C\,..$ plošné přímky první soustavy procházející resp. body a, b, $c\,..$ a A', B', $C'\,..$ plošné přímky druhé soustavy, procházející body a', b', $c'\,..$ Soustavy $ABC\,..$ a $A'B'C'\,..$ budou — jsouce perspektivné k daným křivým řadám — mezi sebou projektivné a vytvoří dle předchozí věty svazek rovin druhého řádu, t. j. roviny (AA'), (BB'), (CC'), .. jsou tečnými rovinami kužele druhého řádu.

Je-li jeho vrchol o mimo rovinu čáry Σ, jsou stopy $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$, $\overline{cc'}\,..$ těchto tečných rovin tečnami kuželosečky Π, jež jest stopou kužele na rovině čáry Σ. Projektivné soustavy vytvoří však také křivou řadu druhého řádu t. j. *body* (AA'), (BB'), (CC'), .. naplní kuželosečku Σ' a podle ní se kužel dotýká přímočaré plochy. Průsečnice rovin obou kuželoseček Σ a Σ' protne plochu ve dvou společných bodech těchto čar, a tečná rovina v každém tomto bodě obsahuje dvě sdružené přímky soustav, pročež jest každý tento bod samodružným bodem daných křivých řad a tečna čáry Σ v něm zároveň tečnou čáry Π.

Zapadne-li vrchol o do roviny čáry Σ, procházejí stopy $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$, $\overline{cc'}$, .. všech tečných rovin (AA'), (BB'), (CC'), .. kužele tímto bodem, čímž věta v levo dokázána.

V příčině věty po pravé straně buďte $A_0B_0C_0\,..\,\pi\,A'_0B'_0C'_0\,..$ dva projektivné svazky druhého řádu na kuželosečce Σ. Promítněme je z libovolného bodu s dvěma soumístnými svazky druhého řádu $\alpha\beta\gamma\,..\,\pi\,\alpha'\beta'\gamma'\,..$, jichž elementy jsou tedy tečnými rovinami kužele, jenž promítá Σ z bodu s. Sestrojme nyní (čl. 104.) přímočarou plochu druhého řádu vepsanou do tohoto

kužele, t. j. tak, aby každá tečná rovina kužele obsahovala plošnou přímku plochy, a buďte $A, B, C, ..$ plošné přímky první soustavy zapadající resp. do rovin $\alpha, \beta, \gamma, ..$, a $A', B', C', ..$ plošné přímky druhé soustavy zapadající do rovin $\alpha', \beta', \gamma', ..$ Soustavy ty jsouce perspektivné k svazkům rovin $\alpha\beta\gamma ..$, resp. $\alpha'\beta'\gamma' ..$, jsou projektivné a vytvoří tedy dle první věty tohoto článku křivou řadu druhého řádu a křivý svazek druhého řádu. Jsou tedy předně *body* (AA'), (BB'), (CC'), .. na kuželosečce Σ'; body ty se ale patrně promítají z vrcholu s na rovinu čáry Σ do bodů $(A_0A'_0)$, $(B_0B'_0)$, $(C_0C'_0)$ .., pročež i tyto body jsou na kuželosečce Π, průmětu to čáry Σ'. Za druhé procházejí *roviny* (AA'), (BB'), (CC'), .. jedním bodem, dotýkajíce se kužele druhého řádu opsaného přímočaré ploše podél Σ'; spojnicí vrcholů obou kuželů procházejí samodružné roviny svazků $\alpha\beta\gamma .. \pi\ \alpha'\beta'\gamma' ..$, a dotyčnými jich body s přímočarou plochou procházejí sdružené paprsky daných soustav, tak že se v průmětech těchto bodů dotýkají čáry Σ a Π, to jest v dotyčných bodech samodružných paprsků křivých svazků $A_0B_0C_0 .. \pi\ A'_0B'_0C'_0 ..$

V případě, kdy rovina čáry Σ prochází vrcholem s, jest průmět Π čáry Σ' přímka, a pak se tedy nalézají průsečíky $(A_0A'_0)$, $(B_0B'_0)$, $(C_0C'_0)$, .. na přímce.

Právě dokázané dvě věty lze tedy takto doplniti:

Spojnice sdružených bodů dvou soumístných projektivných řad na kuželosečce Σ se dotýkají kuželosečky, která se dotýká čáry Σ v samodružných bodech, aneb procházejí jediným bodem; v druhém případě jsou řady involutorné.

Průsečíky sdružených paprsků dvou soumístných křivých svazků na kuželosečce Σ naplňují kuželosečku, která se dotýká čáry Σ v dotyčných bodech samodružných paprsků, aneb naplňují přímku; v druhém případě jsou svazky involutorné.

Věty ty lze obrátiti, to jest platí následující dvě věty:

Dotýká-li se kuželosečka Π kuželosečky Σ ve dvou bodech r, s, protíná libovolná tečna čáry Π čáru Σ ve dvou sdružených bodech dvou křivých projektivných řad, jichž samodružné body jsou r, s.

Dotýká-li se kuželosečka Π kuželosečky Σ ve dvou bodech r, s, procházejí libovolným bodem čáry Π k čáře Σ dvě tečny sdružené dvou křivých projektivných svazků, jichž samodružné paprsky jsou tečny čar v bodech r a s.

Veďme, v příčině věty po levé straně, tečnu A kuželosečky Π a označme a, a' její průsečné body s čarou Σ. Vytkneme-li

na Σ dvě projektivné řady tím, že bodům r, s, a přiřadíme resp. body r', s', a', kde $r' \equiv r$, $s' \equiv s$, budou r, s body samodružné, a dle předchozí věty jsou spojnice $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$, .. tečny kuželosečky, dotýkající se čáry Σ v bodech r, s, tedy kuželosečky Π, jelikož body r, s s tečnami a tečna A kuželosečku úplně stanoví. — Obdobně lze dokázati větu na pravé straně.

Předchozími větami snadno rozřešíme úkoly:

Sestrojiti kuželosečku, jež se dotýká dvakráte dané kuželosečky Σ a tří daných přímek A, B, C.

Vésti třemi body a, b, c kuželosečku, jež se dotýká dvakráte dané kuželosečky Σ.

Označme a, a' průsečíky přímky A s čarou Σ, obdobně b, b' a c, c' průsečíky přímky B a C s čarou Σ. Projektivné řady $abc .. \pi\, a'b'c' ..$ vytvoří kuželosečku hovící úkolu; totéž učiní řady $abc' .. \pi\, a'b'c ..$, a též řady $ab'c .. \pi\, a'bc' ..$, a konečně řady $ab'c' .. \pi\, a'bc ..$, čímž dostáváme čtvero řešení úkolu po pravé straně a zároveň vidíme, že jiného řešení není.

Označíme-li, v příčině úkolu na pravé straně, literami A, A' tečny vedené bodem a k čáře Σ, B, B' a C, C' tečny vedené k této čáře bodem b resp. c, vytvoří hledanou kuželosečku soumístné křivé svazky $ABC .. \pi\, A'B'C' ..$, aneb $ABC' .. \pi\, A'B'C ..$, aneb $AB'C .. \pi\, A'BC' ..$, aneb konečně $AB'C' .. \pi\, A'BC ..$, čímž plyne opět čtvero řešení.

Řešení lze snadno sestrojiti v případě, kdy v levém úkolu přímky A, B, C protínají Σ v reálných bodech, a tedy v pravém úkolu body a, b, c procházejí k Σ reálné tečny; body $(\overline{ab'}\ \overline{a'b})$, $(\overline{ac'}\ \overline{a'c})$, $(\overline{bc'}\ \overline{b'c})$ jsou na spojnici dotyčných bodů r, s čáry Σ s prvním řešením úkolu v levo a přímky $\overline{(AB')\ (A'B)}$, $\overline{(AC')\ (A'C)}$, $\overline{(BC')\ (B'C)}$ procházejí bodem, jímž procházejí společné tečny R, S čáry Σ a prvního řešení úlohy na pravé straně. I v případě, kdy reálná spojnice $\overline{rs}$ protíná Σ v imaginárných bodech, aneb kdy reálným bodem (RS) procházejí k Σ imaginárné tečny, lze hledanou kuželosečku dle čl. 73. sestrojiti.

Opravy.

V obr. 5. sluší vyznačiti šípem rotační směr opačný rotačnímu směru ručiček u hodin.

V obr. 79. sluší označiti bod $(\overline{ab'}\ \overline{a'b})$ literou δ' a bod $(\overline{ab}\ \overline{a'b'})$ literou δ''.

V obr. 109. nutno zaměniti označení bodů f a f'.

OBSAH.

Stránka

Předmluva V
Úvod VI

Kapitola I. **Perspektivný a projektivný vztah základných útvarů prvního řádu.**

1. Elementy a základné útvary geometrické 1
2. Nekonečně vzdálené elementy; perspektivný názor na prostor 2
3. Promítání a protínání; průměty a řezy 4
4. Perspektivný vztah základných útvarů prvního řádu 4
5. Dělící poměr v řadě; harmonické body 7
6. Dělící poměr ve svazcích; harmonické paprsky a roviny 8
7. Stálý podíl dělících poměrů sdružených elementů v útvarech perspektivných 10
8. Dvojpoměr; rovnost dvojpoměrů v útvarech perspektivných 12
9. Řada v nekonečnu, svazek rovnoběžných paprsků neb rovnoběžných rovin 14
10. Projektivnost 15
11. Stanovení projektivnosti elementy sdruženými 16
12. Pokračování 17
13. Zjednodušení konstrukce projektivných řad 19
14. Strojení projektivných svazků 21
15. Vztah o stejných dvojpoměrech 23
16. Centrálné elementy; podobné a shodné řady, shodné svazky 24

Kapitola II. **Reciprocita. Úplný čtyrroh a čtyrstran. Perspektivné trojúhelníky a jiné applikace.**

17. Reciprocita čili duálnost 26
18. Harmonické vlastnosti úplného čtyrrohu a čtyrstranu 28
19. Harmonické vlastnosti úplného čtyrhranu a čtyrstěnu 30
20. Perspektivné (homologické) trojúhelníky v rovině 30
21. Jiné applikace vztahu perspektivného 32

Kapitola III. **Soumístné útvary projektivné. Samodružné elementy.**

22. Soumístné útvary 35
23. Samodružné elementy 36
24. Strojení druhého samodružného elementu 38
25. Existence samodružných elementův 40
26. Útvary nesouhlasné 41
27. Útvary souhlasné 42
28. Počtářské stanovení projektivnosti řad bodových 44
29. Počtářské stanovení projektivnosti svazků 46
30. Centrálné a samodružné elementy, stanovené počtářsky; elementy imaginárné 47
31. Stálý dvojpoměr elementů samodružných a dvou elementů sdružených . 49

Kapitola IV. **Involuce.**

32. Involutorné útvary projektivné 50
33. Stanovení involuce; involuce šesti elementů 52
34. Involutorná vlastnost úplného čtyrrohu a čtyrstranu 54

Stránka

35. Bod centrálný; samodružné (dvojné) body involuce 56
36. Paprsky centrálné a dvojné v involutorných svazcích 60
37. Svazek kruhový; strojení dvojných bodů involuce, jich reálnost 61

Kapitola V. **Projektivné vlastnosti kružnice. Strojení samodružných elementův.**

38. Kružnice, vytvořená svazky shodnými 64
39. Kružnice, vytvořená projektivnými řadami 65
40. Křivá řada a křivý svazek na kružnici 66
41. Strojení samodružných paprsků a samodružných bodů 67
42. Úlohy geometrické druhého stupně 70
43. Strojení samodružných paprsků involuce; involuce bodová na kružnici . 71
44. Strojení samodružných bodů involuce; involuce paprsková na kružnici . 73
45. Společný pár dvou soumístných involucí 74

Kapitola VI. **Čáry a kužele druhého řádu.**

46. Perspektivný vztah dvou rovinných soustav 76
47. Soumístné rovinné soustavy perspektivné 78
48. Čáry homologické s kružnicí: kuželosečky 80
49. Dvě základní vlastnosti kuželoseček 82
50. Čára vytvořená dvěma projektivnými svazky. Čáry druhého stupně . . 83
51. Čára vytvořená dvěma projektivnými řadami. Čáry druhé třídy 85
52. Strojení kuželosečky z pěti bodů neb z pěti tečen, t. j. strojení dalších bodů a tečen 87
53. Strojení kuželosečky z pěti bodů: speciálné případy 91
54. Strojení kuželosečky z pěti tečen: speciálné případy 94
55. Jednodušší problem projektivity 97
56. Věta Pascalova (hexagrammum mysticum) 98
57. Věta Brianchonova 101
58. Kuželové plochy druhého stupně a druhé třídy 103

Kapitola VII. **Průsečíky přímky s kuželosečkou, tečny bodem vedené. Projektivné řady a svazky druhého řádu, zvlášť involutorné. Pól a polára.**

59. Průsečíky přímky s kuželosečkou 105
60. Tečny kuželosečky daným bodem 107
61. Body uvnitř a vně kuželosečky, sečny a nesečny 107
62. Soumístné projektivné řady a svazky druhého řádu 109
63. Involuce bodová na kuželosečce 111
64. Involuce paprsková (tečnová) na kuželosečce 113
65. Pól a polára 115
66. Polárné vlastnosti kuželosečky, sdružené body a sdružené přímky . . 117
67. Polárné trojúhelníky 122
68. Projektivné svazky sdružených přímek a řady sdružených bodů 123
69. Pól a polára zvrhlých čar 124

Kapitola VIII. **Strojení kuželoseček z imaginárných bodů a tečen. Adjungovaná involuce. Soumístné projektivné útvary o splývajících elementech samodružných.**

70. Imaginárné body, paprsky a roviny 123
71. Imaginárné body jakožto průsečíky kuželosečky s přímkou a paprsky jakožto tečny bodem 124
72. Strojení kuželosečky dané třemi reálnými a dvěma konjugovanými imaginárnými body; konstrukce reciproká 126
73. Strojení kuželosečky dané dvěma konjugovanými imaginárnými body s tečnami a dalším bodem neb tečnou 127

Stránka

74. Strojení kuželosečky dané dvěma páry imaginárných bodů neb tečen a dalším bodem neb tečnou; aneb dané dvěma póly s polárami a dalším bodem neb tečnou 129
75. Involuce adjungovaná dvěma soumístným projektivným útvarům 130
76. Soumístné projektivné útvary o splývajících elementech samodružných . 133
77. Involuce adjungovaná dvěma soumístným involucím 133
78. Sestrojení průsečíku konjugovaných imaginárných přímek a spojnice konjugovaných imaginárných bodů 134

Kapitola IX. **Svazek a řada kuželoseček. Věta Desargues-ova a její zobecnění. Strojení kuželoseček z pěti elementů. Polárná vlastnost svazku a řady kuželoseček.**

79. Svazek a řada kuželoseček 137
80. Věta Desargues-ova a věta reciproká 140
81. Speciálné případy 143
82. Jiné odvození věty Desargues-ovy 145
83. Zobecnění věty Desargues-ovy 145
84. Oskulující kuželosečky 148
85. Strojení kuželoseček z pěti elementů 151
86. Polárná vlastnost svazku a řady kuželoseček 153

Kapitola X. **Střed, sdružené průměry, osy, ohniska, řídící přímky kuželoseček. Imaginárné body kruhové v nekonečnu. Konfokální kuželosečky. Oskulační kružnice. Homothetické kuželosečky.**

87. Střed a sdružené průměry 155
88. Osy kuželosečky; délka laterálného průměru 158
89. Strojení kuželosečky ze dvou sdružených průměrů 160
90. Strojení os ze dvou sdružených průměrů 162
91. Ohniska kuželosečky 164
92. Řídící přímky kuželosečky 167
93. Imaginárné body kruhové v nekonečnu 169
94. Ohniska, konfokálné kuželosečky 171
95. Oskulační kružnice kuželosečky 173
96. Homothetické kuželosečky 174

Kapitola XI. **Přímočaré plochy vznikající projektivnými útvary základnými.**

97. Soustava plošných přímek 175
98. Projektivnost soustavy plošných přímek 177
99. Průsečné body s přímkou a tečné roviny přímočaré plochy druhého stupně 178
100. Řezy s rovinami, opsané plochy kuželové, polárná rovina a pól . . . 179
101. Jednoplochý hyperboloid a hyperbolický paraboloid 181

Kapitola XII. **Projektivnost útvarů elementárných.**

102 Útvary elementárné 183
103. Perspektivná poloha útvarů elementárných 183
104. Projektivné útvary elementárné 185
105. Projektivné soustavy plošných přímek, soumístné křivé řady a svazky . 186

Math 5158.98.7
Projektivna geometrie zakladnych
Cabot Science 003334586
3 2044 091 904 110